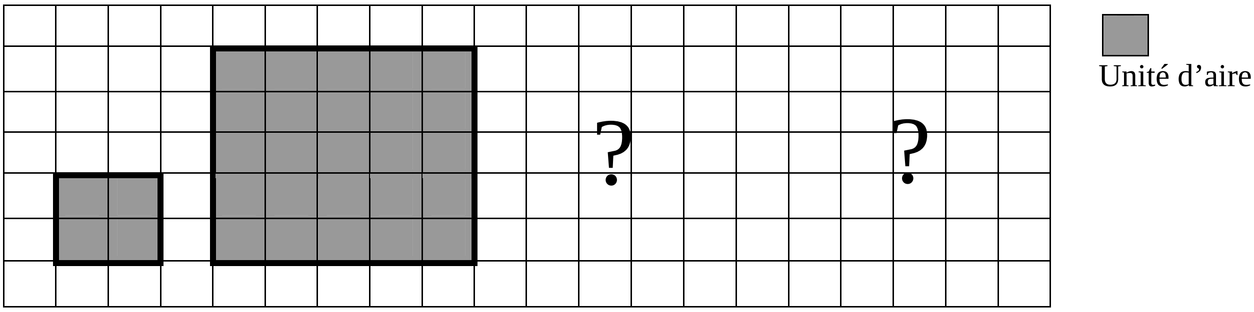
RACINE CARREE D'UN NOMBRE POSITIF

1. <u>La notion de racine carrée</u>

<u>Activité :</u>

Soit les carrés représentés ci-dessous :



n°1 **n°2** **n°3** **n°4**

a. Compléter le tableau suivant et construire les carrés manquants :
On prendra pour unité d'aire, le carreau et pour unité de longueur, la longueur d'un carreau.

	n°1	**n°2**	**n°3**	**n°4**
Aire **A** du carré				16
Longueur **x** du côté du carré			2,5	

b. Justifier, par un calcul, l'aire de chacun des carrés n°2 et n°4.
c. Recopier et compléter la phrase suivante : « L'aire d'un carré A est égale au ..…………. de sa longueur ».
d. Traduire cette phrase par la formule de A en fonction de x.
e. Calculer A, par la formule, si x = 7.
Proposer une valeur négative de x dont le calcul de A, donne le même résultat que pour x = 7.
Que peut-on dire de ces deux valeurs de x qui donne le même résultat ?
f. De même, trouver les deux valeurs de x pour lesquelles A = 100.
Compléter la phrase suivante : « On dit que la valeur positive, …., est la …………… ……..….. de 100 ».

<u>Réponses :</u>

b. Carré n°2 : A= 2×2 = 2² = 4 ; Carré n°4 : x = 4 car A = 4×4 = 16
c. L'aire d'un carré A est égale **au carré de sa longueur x**.
d. On traduit par la formule de A en fonction de x : **$A = x^2$**
e. Si x = 7 alors $A = 7^2 = 49$.
Si x = -7 alors $A = (-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$.
Les valeurs x = 7 et x = -7 sont « opposées ».
f. A = 100 pour x = 10 et x = -10 car $10^2 = 100$ et $(-10)^2 = 100$
Compléter la phrase suivante : « On dit que la valeur **positive**, 10, est la **racine carrée** de 100 ».

<u>Bilan de l'activité :</u>

- L'égalité A = 100 est vraie pour deux valeurs **opposées** de x : 10 et -10
- 10 est le **seul nombre positif dont le carré** est 100.
- On dit que cette seule valeur **positive** 10 est la « **racine carrée** » du nombre 100.
- On écrit : $10 = \sqrt{100}$ qui signifie : $\begin{cases} \underline{\mathbf{10^2 = 100}} \text{ et} \\ \underline{\textbf{10 est un nombre positif}} \end{cases}$

<u>Nous retiendrons :</u>

Soit « a » un nombre positif :

- Il existe deux valeurs **opposées** de x telles que $x^2 = a$.
- La valeur positive de x s'appelle la **racine carrée de « a »** et est notée $\sqrt{a}$. Ainsi : $\mathbf{x = \sqrt{a}}$

Autrement dit :

- **La notation $x = \sqrt{a}$ signifie que :** $\begin{cases} \textbf{x est positif} \\ \mathbf{x^2 = a} \end{cases}$
- **$\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré est égal au nombre « a ».**

Remarque :

- **La définition impose que « a » soit positif car le carré d'un nombre est toujours positif. Ainsi, la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.**
- **De même, la racine carrée est définit comme un nombre positif.**

Exemples simples de racines carrées :

- $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$ et 5 est un nombre positif
  « 5 est le seul nombre positif dont le carré est égal à 25. »
- $\sqrt{100} = 10$ car $10^2 = 100$ et 10 est un nombre positif
- $\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$ et 1 est un nombre positif
- $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$ et 0 est un nombre positif

Autres exemples :

Grâce à la calculatrice, calculer la racine carrée des nombres suivants :

4,41 ; 126 (arrondi à 10^{-2} près) ; -8 ; 1 582 815,61

Réponses :

$\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$; $\sqrt{126} \approx 11{,}22$ est une valeur approchée avec 2 chiffres après la virgule

$\sqrt{-8}$: « ERREUR » Cette racine carrée pas n'a pas de valeur car -8 est un nombre négatif.

$\sqrt{1582815{,}61} = 1258{,}1$

Conséquence de la définition : Carré d'une racine carrée

- Donner la séquence des touches à la calculatrice pour le calcul de $(\sqrt{126})^2$ puis son résultat.

(	$\sqrt{\ }$	1	2	6	)	x^2	=	

- A l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant :

a	126	7,5	16	1 582 815,61
$(\sqrt{a})^2$				

- Compléter alors la règle suivante : **Si « a » est un nombre positif alors $(\sqrt{a})^2$ =** ……..
- Justification pour $(\sqrt{16})^2$: $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$
- Démonstration de la règle :

Soit « a » un nombre positif. Si on note $x = \sqrt{a}$ alors :

- Par définition de la racine carrée, $\mathbf{x^2 = a}$
- Par ailleurs, on peut écrire : $x^2 = x \times x$ donc $x^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ soit $\mathbf{x^2 = (\sqrt{a})^2}$

Conclusion : $x^2 = a = (\sqrt{a})^2$

Nous retiendrons :

Soit a un nombre positif alors : $(\sqrt{a})^2 = a$ « Les notations « $\sqrt{\ }$ » et « ² » se simplifient »

2. Les règles de calculs

Activité n°1 : Racine carrée d'un produit

a. Comparer $\sqrt{9\times25}$ et $\sqrt{9}\times\sqrt{25}$.
b. Comparer $\sqrt{16\times121}$ et $\sqrt{16}\times\sqrt{121}$.

Réponse :

a. $\sqrt{9\times25} = \sqrt{225} = 15$ et $\sqrt{9}\times\sqrt{25} = 3\times5 = 15$ donc $\sqrt{9\times25} = \sqrt{9}\times\sqrt{25}$.

b. $\sqrt{16\times121} = \sqrt{1936} = 44$ et $\sqrt{16}\times\sqrt{121} = 4\times11 = 44$ donc $\sqrt{16\times121} = \sqrt{16}\times\sqrt{121}$.

Règle n°1 : **Soient a et b deux nombres réels positifs alors : $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$**

Application de la règle :

Grâce à la règle de calcul, calculer les expressions suivantes : $\sqrt{25\times121}$; $\sqrt{7}\times\sqrt{28}$

- $\sqrt{25\times121} = \sqrt{25}\times\sqrt{121} = 5\times11 = 55$

  Deux méthodes :

  - ✓ $\sqrt{7}\times\sqrt{28} = \sqrt{7\times28} = \sqrt{196} = 14$ mais il faut connaître le carré de 14 !!!
  - ✓ $\sqrt{7}\times\sqrt{28} = \sqrt{7}\times\sqrt{4\times7} = \sqrt{7}\times\sqrt{4}\times\sqrt{7} = \sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{4} = \left(\sqrt{7}\right)^2\times\sqrt{4} = 7\times2 = 14$

- $\sqrt{15}\times\sqrt{35}\times\sqrt{21} = \sqrt{3\times5}\times\sqrt{5\times7}\times\sqrt{3\times7} = \sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}$

  $= (\sqrt{3})^2\times(\sqrt{5})^2\times(\sqrt{7})^2 = 3\times5\times7 = 115$

Conséquence de la règle : Racine carrée d'un carré

Soit a un nombre positif.

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a\times a} = \sqrt{a}\times\sqrt{a}$ d'après la règle de calcul

$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ or nous avons vu précédemment que $(\sqrt{a})^2 = a$

Conclusion : $\sqrt{a^2} = a$

Nous retiendrons :

Soit a un nombre positif alors : $\sqrt{a^2} = a$ « Les notations se simplifient »

Exemples :

- $\sqrt{5^2} = 5$, en effet : $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

Activité n°2 : Racine carrée d'un quotient

a. Comparer $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}}$ et $\sqrt{\dfrac{144}{36}}$.

b. Comparer $\dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{25}}$ et $\sqrt{\dfrac{400}{25}}$.

Réponse :

a. $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}} = \dfrac{12}{6} = 2$ et $\sqrt{\dfrac{144}{36}} = \sqrt{4} = 2$ donc $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}} = \sqrt{\dfrac{144}{36}}$.

b. $\dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{4}\times\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2\times10}{5} = 4$ et $\sqrt{\dfrac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4$ donc $\dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\dfrac{400}{25}}$.

Règle n°2 : **Soient a et b deux nombres réels positifs avec b différent de 0 alors : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$**

Application de la règle :

Grâce à la règle de calcul, calculer les expressions suivantes : $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$

- $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$
- $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$

Remarques :

Comparer $\sqrt{16+9}$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}$.

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$; $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4 + 3 = \mathbf{7}$

Conséquence : **La racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées.**