FRACTIONS IRREDUCTIBLES

Pré-requis : Connaître la table de multiplication jusqu'à 10.

1. Diviseurs d'un nombre entier (Rappels)

Activité :
Pour refaire la pelouse d'un stade de rugby, en vue d'un match important, le président d'un club souhaite commander des bandes de terre gazonnée. Celles-ci sont livrées en rouleaux de 20 m de long sur 2 m de large. Combien de rouleaux sera-t-il nécessaire pour couvrir une partie du terrain de dimensions 108 m par 71 m ?

Réponse :
L'aire du terrain est : $108 \times 71 = 7\,668$ m²
L'aire couverte par un rouleau de terre est : $20 \times 2 = 40$ m²
Le nombre de rouleaux nécessaires s'obtient par la division : 7 668 / 40 = 191,7 d'après la calculatrice.
Ainsi le nombre de rouleaux à commander est 192.
On peut aussi poser la **division euclidienne** :

```
 76 6 8 | 40
 40↓    |------
 36 6   | 191
 360↓
   6 8
   4 0
   2 8
```

On obtient :
191 le quotient (qui nous intéresse) et 28 le reste.

Autrement dit : $7\,668 = 40 \times 191 + 28$
ou encore : $\mathbf{7\,668 - 40} \times 191 = 28$

« On peut soustraire au maximum 191 fois le nombre 40 au nombre 7668. »

On retiendra :
Le principe de la **division euclidienne** d'un nombre entier positif A par un autre nombre entier positif B (appelé le diviseur) consiste à **soustraire le plus de fois possible le nombre** B **du nombre** A.

- Le nombre de fois qui convient est appelé le **quotient** entier et notée **q**.
- La différence entre A et la quantité retirée est appelée le **reste** et noté **r**.

Ainsi on peut écrire : $\mathbf{A = B \times q + r}$

Cas particulier de la division euclidienne :
Etablir q et r dans chacune des divisions euclidiennes suivantes :
184 par 8 ; 750 par 25.

Réponse :
$184 = 8 \times 23$ donc q = 8 et r = 0 ; $750 = 25 \times 30$ donc q = 30 et r = 0
On dit que 8 et 23 sont des diviseurs de 184. De même, 25 et 30 sont des diviseurs de 750.

On retiendra :
Soit a et b deux entiers différents de 0.
On dit que b est **diviseur** de a si le **reste** de la division euclidienne de a par b est égal à 0.
A la calculatrice, b est un **diviseur** de a si le résultat de la division de a par b est un **entier**.
On dit aussi que si **b** est un **diviseur** de **a** alors **a** est un **multiple** de **b**.

Exemples :
$15 \div 5 = 3$ et le résultat de la division 3 est entier donc 5 est un diviseur de 15
On peut aussi écrire : $15 = 5 \times 3$ donc 15 est un multiple de 5.

Critères de divisibilités par 2, par 5, par 10, par 3 et par 9 :

- Les entiers divisibles par 2 sont les nombres pairs : ils se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Les entiers divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5.
- Les entiers divisibles par 10 se terminent par 0.
- Les entiers divisibles par 3 sont les nombres dont la somme de tous les chiffres est elle-même divisible par 3.
- Les entiers divisibles par 9 sont les nombres dont la somme de tous les chiffres est elle-même divisible par 9.

2. Diviseurs communs à deux entiers

Activité :
Donner la liste de tous les diviseurs de 15, rangés dans l'ordre croissant.
Faire de même pour 20 puis pour 17.

Réponse :
$15 = 1 \times 3 \times 5 = 15 \times 1$ donc la liste des diviseurs de 15 est $\{1 ; 3 ; 5 ; 15\}$
$20 = 1 \times 2 \times 2 \times 5$ donc la liste des diviseurs de 20 est $\{1 ; 2 ; 2 \times 2 = 4 ; 5 ; 2 \times 5 = 10 ; 20\}$
$17 = 1 \times 17$ donc la liste des diviseurs de 17 est $\{1 ; 17\}$

Remarques :
Tout entier supérieur à 1 possède au moins deux diviseurs : 1 (qui sera le plus petit) et lui-même (qui sera le plus grand)

Activité (suite) :
Ecrire la liste de tous les diviseurs communs de 15 et 12, rangés par ordre croissant.
Quel est le plus grand diviseur commun de cette liste? On le nomme le **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur noté **PGCD**.

Réponse :
La liste de tous les diviseurs communs de 15 et 12 est $\{1 ; 3\}$ car $12 = 1 \times 3 \times 2 \times 2 = 12 \times 1$
Le PGCD de 15 et 12 est 3.

Application directe :
Trouver le PGCD de 66 et de 44.

Réponse :
Diviseurs de 66 : {1; 2; 3; 6; 11; **22**; 33; 66} Diviseurs de 44 : {1; 2; 11; **22**; 66} donc PGCD = **22**

Cas particuliers :
Trouver le PGCD de 22 et 15.

Réponse :
$22 = 1 \times 2 \times 11 = 1 \times 22$ donc la liste des diviseurs de 22 est $\{1 ; 2 ; 11 ; 22\}$
On a vu que la liste des diviseurs de 15 est $\{1 ; 3 ; 5 ; 15\}$.
Le seul diviseur commun de 22 et 15 est 1, ce qui se traduit par un PGCD égal à **1**.

Définition :
Deux nombres entiers qui n'admettent que **1 pour seul diviseur commun**, **sont dits « premiers entre eux »**.
Autrement dit, deux nombres **premiers entre eux** ont un **PGCD est égal à 1**.

Exemple :
4 et 15 sont premiers entre eux car ils n'admettent que 1 comme diviseur commun.

3. Simplification d'une fraction

Rappels :

- On ne change pas la valeur d'une fraction en divisant (ou en multipliant) son numérateur et son dénominateur par **un même nombre non nul**.

Exemple :

$$\frac{24}{30} \overset{\times 2}{=} \frac{48}{60} \overset{\div 3}{=} \frac{16}{20} \overset{\div 4}{=} \frac{4}{5} \overset{\times 10}{=} \frac{40}{50}$$

- **Simplifier une fraction** signifie que l'on **divise** le numérateur et le dénominateur par un **même nombre entier non nul**.

Parmi toutes les fractions de même valeur que $\frac{24}{30}$, quelle est celle dont le dénominateur et le numérateur soient les plus petits possibles.

Réponse : $\frac{4}{5}$. On dit alors que $\frac{4}{5}$ est une fraction **irréductible**.

<u>Définition :</u>
Une fraction que l'on ne peut plus simplifier est dite **irréductible**.

<u>Autre exemple :</u>

Simplifier la fraction $\frac{450}{60}$ pour jusqu'à ce qu'elle soit irréductible.

<u>Réponse :</u> $\frac{450}{60} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{225}{30} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{75}{10} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{15}{2}$ Fraction irréductible : $\frac{15}{2}$

Comment, en une seule étape, écrire $\frac{450}{60}$ en une fraction irréductible ?

<u>Réponse :</u> $\frac{450}{60} \underset{\div 30}{\overset{\div 30}{=}} \frac{15}{2}$ Or 30 est le PGCD de 450 et 60.

<u>Conclusion :</u>
Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

<u>Application directe :</u>

a. Simplifier $\frac{21}{70}$ en une fraction irréductible.

b. Pourquoi la fraction $\frac{17}{13}$ est-elle déjà irréductible ?

<u>Réponse :</u>

a. Les diviseurs de 70 et 21 sont : {1 ; 2 ; 5 ; **7** ; 35 ; 70} pour 70 et {1 ; 3 ; **7** ; 21} pour 21
Donc le PGCD de 70 et 21 est égal à 7.

Donc $\frac{21}{70} = \frac{3}{10}$ en divisant par 7 le numérateur et dénominateur.

Donc $\frac{3}{10}$ est fraction une irréductible.

b. La fraction $\frac{17}{13}$ est déjà irréductible car 17 et 13 sont premiers entre eux.