



L'arithmogone - Solution de l'énigme

publié le 16/03/2012

Descriptif :

Solution de l'énigme du 13 mars 2012
Élèves de troisième et de seconde.

-*Soit $\{x\}$, $\{y\}$ et $\{z\}$ les trois nombres cherchés, $\{x\}$ est le nombre associé au sommet du haut, $\{y\}$ celui en bas à gauche et $\{z\}$ celui en bas à droite. On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} x+y=27 \\ y+z=11 \\ z+x=18 \end{cases}$$
 Après calculs, on obtient $\{x\} =$

17, $\{y\} = 10$ et $\{z\} = 1$. ~ On peut remarquer que $2\{x\} + 2\{y\} + 2\{z\} = 27 + 11 + 18$, ~ soit $\{x\} + \{y\} + \{z\} = \frac{1}{2}(27+11+18)$. ~ Donc pour avoir $\{x\}$ par exemple, il suffit de calculer la demi somme des trois nombres donnés et de soustraire le nombre qui se trouve en face, soit $\{x\} = \frac{1}{2}(27+11+18)-11=17$. ~ Pour que la configuration du triangle

fonctionne, il faut donc que la somme des trois nombres donnés soit paire. -*Soit $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$ et $\{t\}$ les quatre nombres cherchés, $\{x\}$ est le nombre associé au sommet du haut à gauche, $\{y\}$ celui en bas à gauche et $\{t\}$ celui en

haut à droite et $\{z\}$ celui en bas à droite. On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} x+t=20 \\ x+y=17 \\ z+y=24 \\ z+t=27 \end{cases}$$
 ~ On obtient après

calculs les relations suivantes : ~ $\{x\} = 20 - \{t\}$ ~ $\{y\} = 17-20 + \{t\} = \{t\} - 3$ ~ $\{z\} = 27 - \{t\}$ ~ Donc $\{t\} + \{z\} = 27$ devient $27 - \{t\} + \{t\} = 27$, équation toujours vraie, donc il y a une infinité de solutions pour t . ~ Or le texte précise que les nombres sont des entiers naturels donc positifs. On en déduit les conditions supplémentaires suivantes: ~ $\{x\} = 20 - \{t\}$ et $\{x\} \geq 0$, c'est-à-dire $\{t\} \leq 20$ ~ $\{y\} = 17-20 + \{t\} = \{t\} - 3$ et $\{y\} \geq 0$, c'est-à-dire $\{t\} \geq 3$ ~ $\{z\} = 27 - \{t\}$ et $\{z\} \geq 0$, c'est-à-dire $\{t\} \leq 27$ ~ $\{t\}$ peut donc prendre les valeurs suivantes respectivement : ~ 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 ~ On associe donc à $\{x\}$: ~ 17 - 16 - 15 - 14 - 13 - 12 - 11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 ~ On associe donc à $\{y\}$: ~ 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 ~ On associe donc à $\{z\}$: ~ 24 - 23 - 22 - 21 - 20 - 19 - 18 - 17 - 16 - 15 - 14 - 13 - 12 - 11 - 10 - 9 - 8 ~ Remarquons que $\{x\} + \{y\} + \{z\} + \{t\} = 17 + 27 = 20 + 24$. Donc pour que la configuration du carré fonctionne, il faut que les sommes des deux nombres associés aux côtés opposés soient égales.