



## L'arithmogone - Solution de l'énigme

publié le 16/03/2012

### Descriptif :

Solution de l'énigme du 13 mars 2012  
Élèves de troisième et de seconde.

-\*Soit  $\{x\}$ ,  $\{y\}$  et  $\{z\}$  les trois nombres cherchés,  $\{x\}$  est le nombre associé au sommet du haut,  $\{y\}$  celui en bas à gauche et  $\{z\}$  celui en bas à droite. On doit donc résoudre le système 
$$\begin{cases} x+y=27 \\ y+z=11 \\ z+x=18 \end{cases}$$
 Après calculs, on obtient  $\{x\} =$

17,  $\{y\} = 10$  et  $\{z\} = 1$ . ~ On peut remarquer que  $2\{x\} + 2\{y\} + 2\{z\} = 27 + 11 + 18$ , ~ soit  $\{x\} + \{y\} + \{z\} = \frac{1}{2}(27+11+18)$ . ~ Donc pour avoir  $\{x\}$  par exemple, il suffit de calculer la demi somme des trois nombres donnés et de soustraire le nombre qui se trouve en face, soit  $\{x\} = \frac{1}{2}(27+11+18)-11=17$ . ~ Pour que la configuration du triangle

fonctionne, il faut donc que la somme des trois nombres donnés soit paire. -\*Soit  $\{x\}$ ,  $\{y\}$ ,  $\{z\}$  et  $\{t\}$  les quatre nombres cherchés,  $\{x\}$  est le nombre associé au sommet du haut à gauche,  $\{y\}$  celui en bas à gauche et  $\{t\}$  celui en

haut à droite et  $\{z\}$  celui en bas à droite. On doit donc résoudre le système 
$$\begin{cases} x+t=20 \\ x+y=17 \\ z+y=24 \\ z+t=27 \end{cases}$$
 ~ On obtient après

calculs les relations suivantes : ~  $\{x\} = 20 - \{t\}$  ~  $\{y\} = 17-20 + \{t\} = \{t\} - 3$  ~  $\{z\} = 27 - \{t\}$  ~ Donc  $\{t\} + \{z\} = 27$  devient  $27 - \{t\} + \{t\} = 27$ , équation toujours vraie, donc il y a une infinité de solutions pour  $t$ . ~ Or le texte précise que les nombres sont des entiers naturels donc positifs. On en déduit les conditions supplémentaires suivantes: ~  $\{x\} = 20 - \{t\}$  et  $\{x\} \geq 0$ , c'est-à-dire  $\{t\} \leq 20$  ~  $\{y\} = 17-20 + \{t\} = \{t\} - 3$  et  $\{y\} \geq 0$ , c'est-à-dire  $\{t\} \geq 3$  ~  $\{z\} = 27 - \{t\}$  et  $\{z\} \geq 0$ , c'est-à-dire  $\{t\} \leq 27$  ~  $\{t\}$  peut donc prendre les valeurs suivantes respectivement : ~ 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 ~ On associe donc à  $\{x\}$  : ~ 17 - 16 - 15 - 14 - 13 - 12 - 11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 ~ On associe donc à  $\{y\}$  : ~ 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 ~ On associe donc à  $\{z\}$  : ~ 24 - 23 - 22 - 21 - 20 - 19 - 18 - 17 - 16 - 15 - 14 - 13 - 12 - 11 - 10 - 9 - 8 ~ Remarquons que  $\{x\} + \{y\} + \{z\} + \{t\} = 17 + 27 = 20 + 24$ . Donc pour que la configuration du carré fonctionne, il faut que les sommes des deux nombres associés aux côtés opposés soient égales.