



Bon anniversaire à vous deux !

publié le 29/01/2021 - mis à jour le 09/04/2021

Modélisation en probabilités

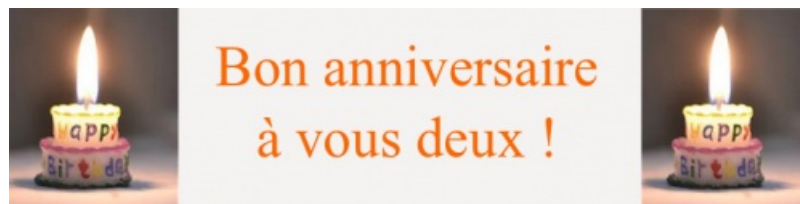
Descriptif :

Une activité basée sur une question paradoxale par sa réponse en opposition avec l'intuition. La modélisation par les probabilités est-elle en accord avec la réalité ?

Sommaire :

- [Sommaire des TraAms "modéliser"](#)
- Description de la tâche de modélisation
- Démarche de l'enseignant
- Description du déroulement de la séance
- Les élèves et la modélisation
- Prolongement et perspectives
- Documents de référence
- [Retour au Sommaire des TraAms "modéliser"](#)

● [Sommaire des TraAms "modéliser"](#)



● [Description de la tâche de modélisation](#)

○ [Problématique](#)

Est-ce rare que deux élèves d'une classe fêtent leur anniversaire le même jour ? La modélisation par les probabilités est-elle en accord avec la réalité ?

○ [Niveau concerné](#)

Classe de seconde

○ [Modèle\(s\) mathématiques utilisé\(s\)](#)

Dénombrement à l'aide d'arbre, probabilités, fréquence et échantillonnage

○ [Autres compétences mathématiques mises en jeu](#)

Chercher, calculer, raisonner, communiquer

○ [Compétences numériques](#)

Tableur et Python

○ Nombre d'heures envisagées

Trois séances d'une heure

● Démarche de l'enseignant

Les premières questions que nous pouvons nous poser sont : pourquoi choisir une activité fondée sur une question paradoxale ? Qu'est-ce qu'un paradoxe ?

Diderot disait, « le paradoxe est une vérité opposée aux préjugés du vulgaire » et le dictionnaire mentionne : étymologiquement (para : « contre » et doxa : opinion), le paradoxe est une opinion ou une proposition à première vue surprenante ou choquante.

Apporter une réponse à une question paradoxale, c'est aller contre le sens commun et donc marquer les esprits. Cette problématique devrait donc susciter la curiosité des élèves.

Notre objectif est de répondre, de façon fiable, à la question posée qui, de surcroît, est issue du monde réel. C'est là qu'intervient l'utilisation d'un modèle. Citons David Ruelle :

« Un modèle consiste à coller une théorie mathématique sur un morceau de réalité ».

La solution est d'utiliser les probabilités, seul élément mathématique d'ailleurs, permettant d'étudier le hasard. Mais, il y a souvent dans l'enseignement des probabilités une confusion entre le modèle que l'on utilise et la réalité que l'on veut étudier.

Et le recours à la simulation pour faire apparaître une fréquence limite peut avoir comme conséquence de renforcer cette confusion. Les élèves n'ayant pas en effet conscience que le modèle utilisé n'est pas la réalité.

Par ailleurs, les programmes de collège abordent l'approche des probabilités cardinalistes qui suppose l'équiprobabilité des issues et l'approche fréquentiste qui assimile une fréquence observée à la « probabilité théorique » sans que l'on connaisse la précision de cette approximation.

On peut donc s'attendre à ce que les élèves soient vierges de toute réflexion à ce sujet et fassent la confusion. Mon intention est de faire émerger un questionnement sur ces approches et d'éveiller leur sens critique.

L'attendu final est de mesurer la véracité de notre modèle : est-il acceptable ? "Colle"-t-il à la réalité ?

● Description du déroulement de la séance

Un travail préliminaire est effectué.

Pour introduire l'activité et susciter l'intérêt des élèves par des éléments puisés dans leur environnement, chacun est amené à effectuer un travail personnel de recherche à la maison. Je leur demande de récolter des données existantes sur des groupes de personnalités de leur choix et de les déposer sur un document collaboratif dont voici un extrait du récapitulatif ([cliquer sur l'image pour l'agrandir](#)).

Groupe	Axel Lauréats du Prix Nobel de physique	Emma et Mandy Jeunes de l'équipe de France	Bastien, Jana,... Présidents français	Mathis et Lou Joueur Lauréat du ballon d'or depuis 1956	Antoine Groupe des 93 médaillés français au Jeux Olympique de Rio en 2016.	Simon et Malo équipe de France de 2018 lors de la coupe du monde	Armand Président des états unis.	Martin Pilotes de F1
Taille du groupe	215	23	25	44	93	23	36	20
Nombre de jour de l'année ayant au moins deux anniversaires	38	1	0	0	11	1	1	0
	Wilhelm Conrad Röntgen : 27 mars Hendrik Antoon Loeentz : 18 juillet Pieter Zeeman : 25 mai Antoine Henri Becquerel : 15 décembre Pierre Curie : 15 mars Marie Sklodowska-Curie : 7 novembre John William Strutt Rayleigh : 12 novembre Philippe Eduard Anton von Lenné : 7 juin Joseph John	-Sarah Boudhadi: 17 octobre 1986 -Solène Durand -Solène Durand : 20 novembre 1992 -Pauline Peyraud- Magna : 1 7 mars 1992 -Julie Debever : 18 avril 1988 -Sakina Karchaoui : 26 janvier 1996 -Amel Majni : 25 janvier 1993 -Grégoire Mbouk Bathy NKA : 26 février 1995 -Eve Périsset : 24 décembre 1994 -Wendie Renard : 20 juillet 1990	-Napoléon Bonaparte : 20 avril 1808 -Adolphe Thiers : 15 avril 1797 -Patrice de Mac Mahon : 13 juin 1808 - Jules Grévy : 15 août 1807 - Sadi Carnot : 11 août 1837 - Jean Casimir- Perier : 8 novembre 1847 - Félix Faure : 30 janvier 1841 - Emile Loubet :	-Stanley Matthews : 1er février 1915 -Alfredo Di Stefano : 4 juillet 1926 -Raymond Kopa : 13 octobre 1931 -Luis Suárez : 2 mai 1935 -Omar Sivori : 2 octobre 1935 -Josef Masopust : 9 février 1931 -Lev Yachine : 22 octobre 1929	-Amédée Leynaud (2 mai) -Alphonse Pénaud (2 mai) Adrien Digarda (3 mai) Camille Aylgou- Saurina (21 mai) Kentin Mahé (22 mai) Gauthier Germier (29 mai) Daniel Jérent (4 juin) Cédric Sorhaindo (7	Hugo Lloris : 26 décembre 1986 Steve Mandanda : 28 mars 1985 Alphonse Areola : 27 février 1993 Djibril Sidibé : 29 juillet 1992 Benjamin Pavard : 28 mars 1996 Sammuel Umtiti : 14 novembre 1993 Raphaël Varane : 25 avril 1993 Presnel Kimpembe : 13 août 1995 Adil Rami : 27 décembre 1985 Benjamin	15 septembre 1857 William Howard Taft Antonio Gervasio 14/12/93 Pierre Gasly 7/2/96 Yuki Tsunoda 11/5/00 Esteban Ocon 17/09/96 Fernando Alonso 29/07/81 Sebastian Vettel 3/7/87 Lance Stroll 29/10/98 Herbert	Kimi Raikkonen 17/10/79 Antonio Gervasio 14/12/93 Pierre Gasly 7/2/96 Yuki Tsunoda 11/5/00 Esteban Ocon 17/09/96 Fernando Alonso 29/07/81 Sebastian Vettel 3/7/87 Lance Stroll 29/10/98

Aperçu du document collaboratif recensant le nombre de jours à deux anniversaires dans différents groupes de personnalités.

La séance commence par un sondage à l'aide d'un questionnaire en ligne comportant les deux questions suivantes :

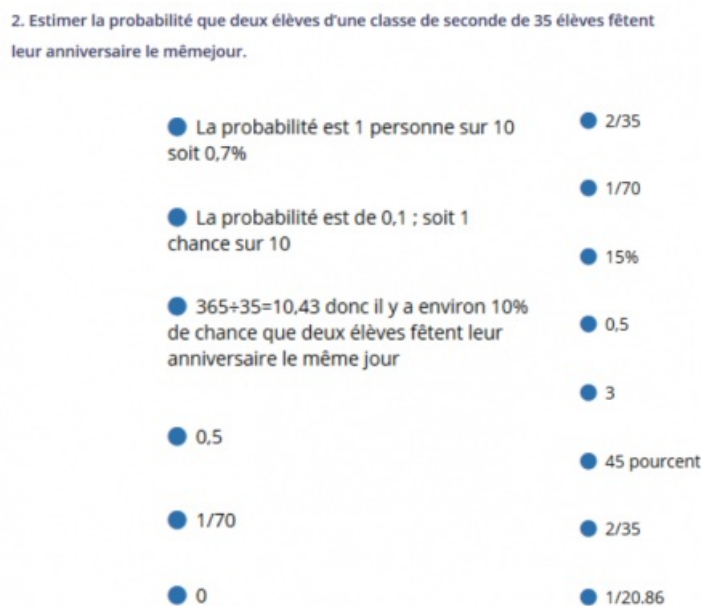
1. Est-ce rare que deux élèves d'une classe fêtent leur anniversaire le même jour ?
2. Estimer la probabilité que deux élèves d'une classe de seconde de 35 élèves fêtent leur anniversaire le même jour.

Voici les réponses obtenues à la question 1 :



Copie d'écran des réponses à la première question du sondage.

Et celles obtenues à la question 2 :



Copie d'écran des réponses à la deuxième question du sondage.

C'est un moyen de connaître leur opinion sur la question posée, mais aussi, d'être en capacité de confronter en fin d'activité leurs réponses aux résultats mathématiques obtenus. Nous mettrons ainsi en évidence le paradoxe.

Vient ensuite pour les élèves, un temps de réflexion personnel par écrit sur la marche à suivre, la façon de s'y

Se dégagent deux types de démarches.

Le groupe B propose rapidement un cheminement exploitable : récolter les données au sein du lycée. Motivés, ils sont même prêts à parcourir les classes de l'établissement. Mais par commodité, je leur fournis les données préparées au préalable à l'aide de la liste que la direction du lycée m'a transmise. Ils se lancent alors dans un travail de tri, classement, et relevé des dates de naissance anonymes, rangées par ordre alphabétique et par classe, de tous leurs camarades du lycée.

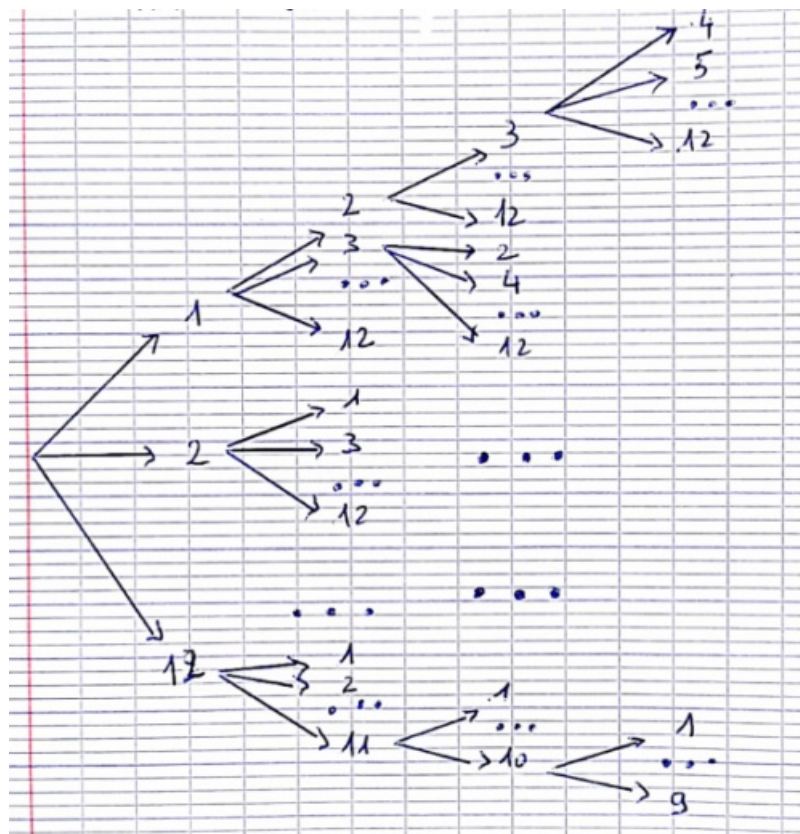
Cf. document suivant :

Fichier tableur des dates de naissances des élèves du lycée pour la piste 1

Aperçu du fichier tableur des dates de naissance des élèves du lycée, triées par ordre croissant.
(cliquer sur l'image pour l'agrandir).

Cf. activité suivante :

Document élève pour l'activité sur les anniversaires



Arbre de probabilités envisagé pour la piste 3

En outre, par manque de temps, ils ont appliqué le programme sur Python calculant la probabilité au lieu de le mettre en place.

Quant au groupe C, obtenir des élèves virtuels n'est pas une démarche qui leur vient à l'esprit. Modéliser une classe par des nombres aléatoires n'a pas été spontané, ni dans la démarche, ni sa mise en application, l'usage des fonctions du tableur faisant là aussi réellement défaut.

Mais une fois l'idée suggérée et les outils nécessaires apportés, ils sont enthousiastes et se lancent rapidement dans la confection d'un document sur le tableur. Ils obtiennent les résultats théoriques attendus. Ayant un nombre de données important, la fréquence de l'événement est proche de la probabilité théorique.

Cf. pistes suivantes :

 [Fichier tableur pour la simulation de l'expérience aléatoire](#) (OpenDocument Spreadsheet de 229.5 ko)
Fichier tableur pour la simulation de l'expérience aléatoire, utilisé pour la piste 2

Est venu ensuite le temps de la synthèse et de l'analyse des résultats.

Piste 4 : La réalité

- * le travail maison est inexécutable car le nombre de groupe est insuffisant (12 groupes de personnalité et 6 groupes de A)
- * Pour le lycée Brancly:
Sur 23 classes, 11 sont dans A

- fréquence : $\frac{11}{23} \approx 0,39$

Conclusion : Dans la réalité, la fréquence est plus faible.
Elle coïncide avec les avis du sondage.

Compte-rendu rédigé par le groupe ayant suivi la piste 1

Piste 2: Id 11: avec la simulation
on a obtenu sur le tableau un échantillon de classes.

- nombre de classes = 50
- nombre de classes de l'événement A = 42
- fréquence de l'événement A est: $f = \frac{42}{50} = 0,84$

Cette fréquence est-elle représentative?

on détermine l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

La probabilité théorique obtenue avec la piste 1 est: $p = 0,81$

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,81 - \frac{1}{\sqrt{50}} \quad \left| \quad p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,81 + \frac{1}{\sqrt{50}} \right.$$

$$\approx 0,67 \quad \left| \quad \approx 0,95 \right.$$

L'intervalle est $I = [0,67; 0,95]$
on a $f = 0,84$, $f \notin I$

Donc on peut prendre en compte cette fréquence. Elle est représentative de l'ensemble de la population avec quand même un risque d'erreur d'en au seuil de 95%.

Conclusion: Les résultats de la simulation contredisent aussi les réponses au quinze.

Compte-rendu rédigé par le groupe ayant suivi la piste 2

On note A l'événement: "la classe possède au moins deux éléments avec un anniversaire commun".

Piste 3: On a calculé la probabilité

On cherche $P(\bar{A})$.

Le nombre d'issues de $\bar{A}$ est: $365 \times 364 \times \dots \times 331$

Le nombre total d'issues est: $365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^{35}$

Donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times 331}{365^{35}}$

Avec le programme Python on obtient $P(A) \approx 0,81$

Nb d'élèves de la classe	40	20	25	30	35	40	45	50	55
Probabilité de l'événement A	0,42	0,41	0,57	0,71	0,81	0,89	0,94	0,97	0,99

Conclusion:
Ces valeurs sont en accord avec les réponses au quinze: avec le sondage 75% des réponses sont "oui, c'est un mythe".

Compte-rendu rédigé par le groupe ayant suivi la piste 3

Bilan:

Probabilité et simulation	Réalité
→ théorique → basé sur le hasard → dépendant d'un modèle mathématiques	→ ce qui est vrai → se trouve dans la vie → basé sur des faits réels
Eloigné de l'opinion	En accord avec l'opinion

Bilan rédigé en classe

● Les élèves et la modélisation

Les sollicitations préalables à la résolution du problème par le travail maison de recherche et le quiz ont pleinement

joué le rôle attendu, à savoir, immerger les élèves dans le problème et provoquer de l'enthousiasme pour le résoudre. Il est issu de la réalité, tous les élèves se sentent concernés. Ils doivent trouver un moyen d'y répondre, utiliser un modèle. Il est toujours souhaitable qu'un modèle soit issu de la réflexion des élèves. Dans notre activité, il est indéniable que le travail préliminaire a influencé certains d'entre eux dans leur réflexion, dans l'élaboration d'une démarche et dans la recherche d'un modèle.

Mais tout l'intérêt pour nous est d'obtenir les deux types d'études souhaitées pour les comparer. Et tel est bien le cas : des élèves ont travaillé dans le domaine de la réalité et d'autres ont utilisé le modèle de Bernoulli que ce soit pour calculer la probabilité de l'événement, ou, pour obtenir une fréquence s'en rapprochant par simulation avec l'instruction « ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;365) ».

Une première réaction s'est produite avec les probabilités, issues du modèle mathématique, qui sont en opposition avec les réponses au quiz de quasiment tous les élèves,

Nombre d'élèves de la classe	10	20	25	30	35	40	45	50	55
Probabilité de l'événement A	0,12	0,41	0,57	0,71	0,81	0,89	0,94	0,97	0,99

Tableau présentant les probabilités de succès selon l'effectif du groupe

La fréquence de l'échantillon par simulation a renforcé cette opposition à leurs préjugés.

Occasion ici de soulever la question : la fréquence de notre échantillon obtenue par simulation est-elle représentative de l'ensemble ? Ce qui nous amène à l'intervalle de fluctuation.

nombre de classes n	50			
nombre de classes de l'événement A	42			
fréquence de l'événement A	0,84			
probabilité théorique p	0,81			
Intervalle de fluctuation	min	0,668578644	max	0,951421356

Copie d'écran de tableur présentant les bornes de l'intervalle de fluctuation.

Puis arrive la comparaison de ces résultats du modèle mathématiques à ceux de la réalité.

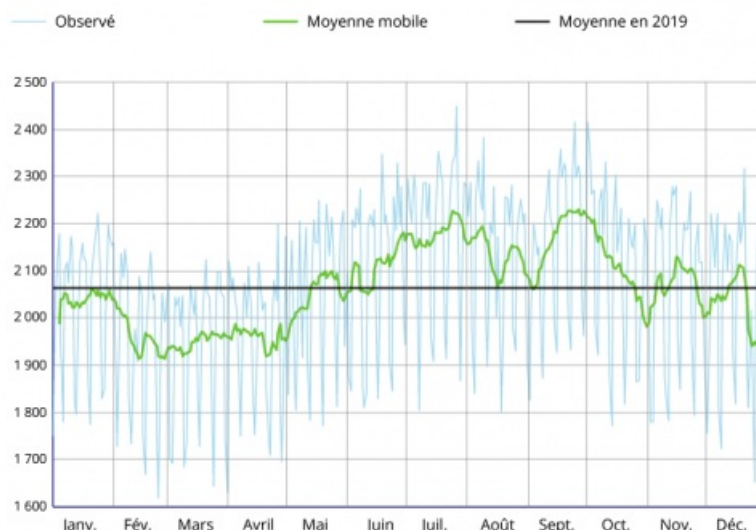
Il est regrettable de ne pas avoir pu exploiter les récoltes de données sur les personnalités à cause de la taille trop faible de l'échantillon obtenu.

En revanche, les données du lycée sont exploitables et nous obtenons la différence attendue.

nombre de classes	29
nombre de classes de l'événement	11
fréquence de l'événement	0,379310345

Copie d'écran de tableur donnant la fréquence de l'événement pour les élèves du lycée Branly

Nous pouvons également illustrer notre propos avec [les données de l'INSEE](#) donnant le nombre de naissances par jour.



Répartition des naissances en France selon les jours de l'année 2019

Le sens critique est éveillé et les questions émergent spontanément des élèves :

Pourquoi cette différence ? Qu'est-ce qui pourrait expliquer que le modèle ne « colle » pas à la réalité ?

Les élèves viennent écrire leurs propositions de réponses au tableau.

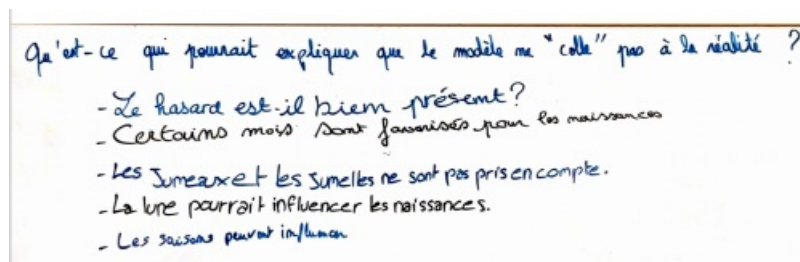


Photo du tableau de classe où sont notées les propositions d'élèves.

Pour conclure, cette activité met bien en lumière le paradoxe. De plus, elle permet de constater que les modèles mathématiques nous donnent des résultats qui ne concordent pas toujours avec les résultats réels.

En conséquence, la question de la véracité des modèles mathématiques est sous-jacente, chose rarement remise en cause dans l'enseignement, les élèves faisant généralement confiance à leur professeur.

● Prolongement et perspectives

Il serait intéressant de faire réfléchir les élèves sur la différence entre la stabilisation de la fréquence pour une expérience et la variation de la fréquence d'une expérience à l'autre dans le cadre d'un travail sur les fluctuations d'échantillonnage.

● Documents de référence

 [Document élève pour l'activité sur les anniversaires](#) (PDF de 68.3 ko)

Document élève pour l'activité sur les anniversaires

 [Travail préparatoire de l'activité](#) (PDF de 51 ko)

Fiche de consignes pour le travail à faire à la maison afin de préparer l'activité

 [Fichier tableur récapitulatif sur les groupes de personnalités](#) (OpenDocument Spreadsheet de 20.6 ko)

Fichier tableur récapitulatif sur les groupes de personnalités

 [Fichier tableur des dates de naissances de tous les élèves du lycée](#) (OpenDocument Spreadsheet de 42.2 ko)

Fichier tableur des dates de naissances des élèves du lycée pour la piste 1

 [Fichier tableur pour la simulation de l'expérience aléatoire](#) (OpenDocument Spreadsheet de 229.5 ko)

Fichier tableur pour la simulation de l'expérience aléatoire, utilisé pour la piste 2

● Retour au Sommaire des TraAms "modéliser"



**Académie
de Poitiers**

Avertissement : ce document est la reprise au format pdf d'un article proposé sur l'espace pédagogique de l'académie de Poitiers.

Il ne peut en aucun cas être proposé au téléchargement ou à la consultation depuis un autre site.