https://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article1304 - Auteur : Thierry Bacle

Somme des mesures des angles d'un triangle

publié le 14/06/2024

Descriptif :

Cet article décrit une séquence outillée par le numérique permettant à des élèves de 5^{e} de conjecturer la somme des mesures des angles d’un triangle et d’en produire une démonstration.

Sommaire :

Contexte et objectif de la séquence

Cette séquence s’effectue dans un cadre purement mathématique : pas de contextualisation. Elle est prévue pour des élèves de 5^{e} comme en attestent les attendus de fin d’année page 10 et les repères annuels de progression page 10 également, de la classe de 5^{e}.
L’objectif est de suivre une démarche expérimentale : essais, observation, conjecture, démonstration tout en passant par des cadres variés pour arriver à la conclusion attendue : la somme des mesures des angles d’un triangle est égale à 180°.

Plus-value du numérique dans cette séquence

L’utilisation du numérique permet de faire un très grand nombre d’essais avec un affichage direct des mesures.
Le numérique permet de mieux visualiser la propriété, de bien voir que cela ne dépend pas de la forme du triangle, d’avoir un support lors de la démonstration entre autres...

Modalités de mise en œuvre

- Niveau éducatif : 5^{e}
- Durée : de 1 à 2 séances
- Application numérique utilisée :
  - L’application GeoGebra (ou un équivalent) est utilisée et de deux façons différentes :
    - Par les élèves avec un dispositif portable si possible et dont l’utilisation ne dépend pas d’une connexion à Internet pour limiter les risques de défaillance : une tablette pour deux avec l’application GeoGebra d’installée par exemple. Cette modalité autorise la réalisation de la séance dans une salle de cours "classique".
    - Par l’enseignant en vidéo projection.
- Pré-requis :
  - Que les élèves soient déjà familiarisés avec l’application GeoGebra.
  - Qu’ils aient déjà mesuré des angles peu de temps avant la séquence bien qu’elle puisse aussi servir d’introduction à la mesure d’angles (mais à ce moment là il faut prévoir plus de temps...)
  - Avoir fait la partie sur les caractérisations angulaires du parallélisme (angles alternes internes...)

● Déroulement

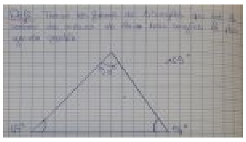
Les étapes :

1. lancement du défi,
2. recherches papier,
3. recherches geogebra,
4. visualisation geogebra,
5. visualisation avec un découpage et un pliage,
6. démonstration,
7. conclusion pour le défi,
8. trace écrite dans le cours.

○ 1. lancement du défi (5 min)

Faire écrire sur le cahier des élèves :

> Défi : Trouver les formes de triangles permettant d’obtenir la somme des mesures des trois angles la plus grande possible.



Cahier d’élève avec la consignes du défi et un exemple de mesures.

Avant qu’ils commencent, faire un exemple au tableau avec un triangle tracé à main levée et des mesures simples et farfelues qui donnent volontairement une somme petite : 40°+60°+20° = 120° par exemple. Dès leur premier essai, ils vont donc normalement trouver une somme supérieure, ce qui peut être motivant.

Il peut être utile de s’assurer de la bonne compréhension de la consigne en la faisant reformuler par exemple jusqu’à obtenir quelque chose ressemblant à : *"Alors, on doit tracer des triangles sur notre feuille. Ensuite on mesure les trois angles. Après, on ajoute les trois mesures que l’on vient de trouver. On continue en traçant un triangle différent pour essayer d’obtenir une somme plus grande."*

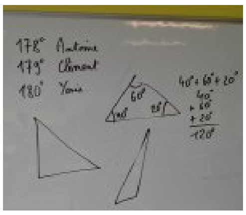


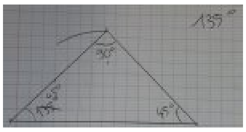
Photo du tableau où l’on voit l’exemple farfelu, des exemples de formes de triangles et un début de récupération des résultats.

Par ailleurs, il leur est demandé de bien écrire leurs mesures près des sommets des angles, de même que la somme. Cette consigne permet à l’enseignant d’être plus efficace lors de la phase d’observation des recherches et de repérage d’erreurs.
Il ne faut pas que le calcul soit une gêne, donc il faut laisser la possibilité aux élèves les plus fragiles de pouvoir utiliser la calculatrice car l’objectif n’est pas de travailler les compétences de calcul mental.

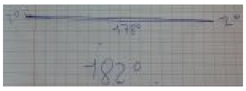
○ 2. recherches papier (10-15 min)

En théorie, les élèves devraient tous trouver 180° mais comme il y a des erreurs de mesures, des imprécisions, certains vont trouver une somme supérieure.
Le fait que l’activité soit présentée sous la forme d’un défi fait que certains élèves "forcent" un peu leurs mesures et leur somme pour gagner.
Les sommes annoncées supérieures (ou inférieures mais c’est plus rare) de beaucoup à 180° permettent de cibler

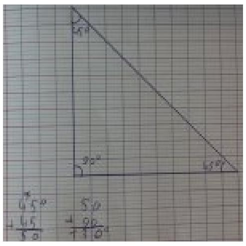
efficacement ceux qui ont encore des difficultés avec l'utilisation du rapporteur, qui utilisent un crayon mal taillé, qui sont peu précis...
Pour faciliter le bilan, on peut lister au tableau les sommes trouvées par chaque élève.
On peut utiliser les élèves rapides comme élèves ressources : des élèves qui ont le droit de se lever et se déplacer pour aider leurs camarades.



Exemple de somme obtenue par un élève.



Exemple de somme obtenue par un élève.



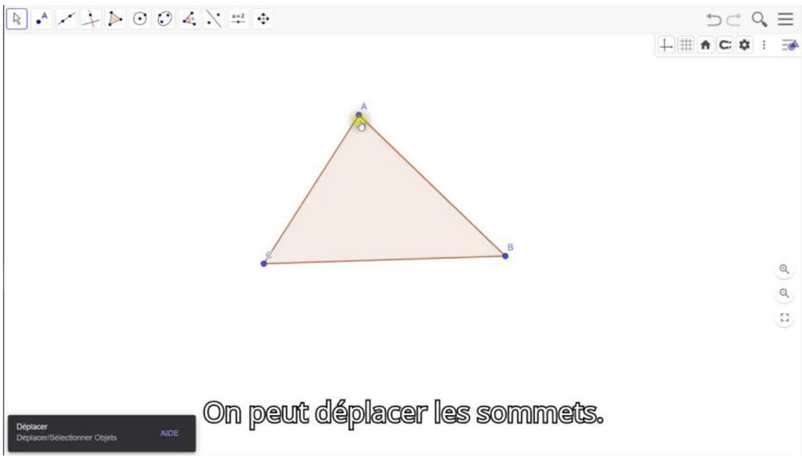
Exemple de somme obtenue par un élève.

3. recherches GeoGebra (10 - 15 min)

Ensuite on peut poser la question suivante :

"Est-ce qu'il y aurait un moyen de faire beaucoup plus d'essais plus rapidement ?"

Si le matériel informatique est présent et visible de façon inhabituelle, cela risque d'orienter les réponses plus facilement.
Quand la réponse attendue est trouvée (il ne faut pas que cela dépasse la minute quand même) : *"On pourrait utiliser GeoGebra."*, on peut passer à la distribution d'une tablette pour deux en privilégiant les binômes avec les voisins.
Quand tout le monde a ouvert l'application, on peut montrer comment faire au vidéo projecteur.



5e - Affichage des mesures des trois angles d'un triangle avec geogebra (Vidéo PeerTube)
Ce court tutoriel montre comment faire afficher les mesures des trois angles d'un triangle avec l'application GeoGebra.

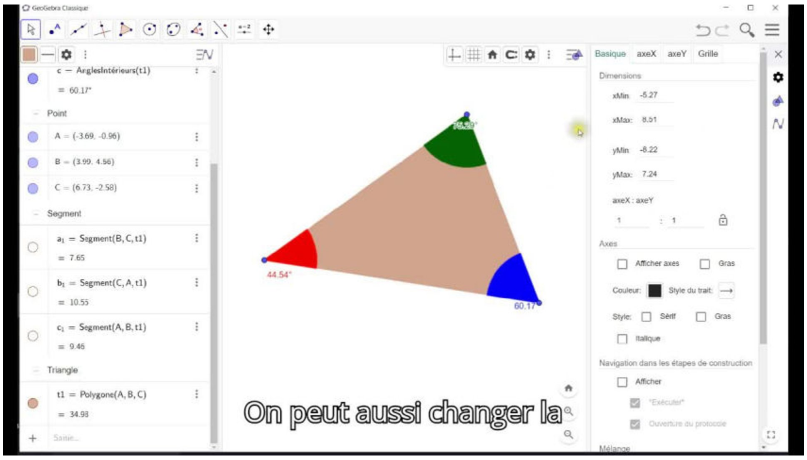
Après s'être assuré de travailler dans un environnement "géométrie" de l'application GeoGebra, on présente le protocole de construction d'un triangle et on passe à la réalisation effective de cette construction. Une fois le triangle créé, on choisit l'outil "Angle" et on clique sur le triangle sans cliquer trop près des sommets. Écarter si besoin les sommets avec l'outil "déplacer".
Les élèves peuvent reprendre leurs calculs afin de trouver la plus grande somme possible.
Là aussi on peut permettre l'usage de la calculatrice surtout que les valeurs sont paramétrées par défaut pour avoir un affichage avec deux décimales. On peut aussi paramétrer un affichage Arrondi avec 0 décimale dans les

propriétés globales pour faciliter la lecture.
Si certains sont suffisamment familiarisés avec l'utilisation de GeoGebra, ils peuvent toujours utiliser une fenêtre de type tableur pour calculer les sommes.
Il n'est pas nécessaire d'obliger à l'utilisation de la fenêtre tableur puisque celle-ci est utilisée en vidéo projection lors du bilan de cette partie.
Quand les groupes commencent à voir que la somme est toujours vraiment très proche de 180°, (ils peuvent trouver 181° ; 180,1° ; 180,01°... suivant l'affichage des mesures des angles avec les valeurs approchées données par l'application GeoGebra) on peut arrêter avec l'utilisation du matériel et le récupérer.
On peut demander ce qu'il ressort de tous ces essais et laisser comme trace écrite :

> Il semble que la somme des mesures des trois angles d'un triangle soit vraiment très proche de 180° quelle que soit la forme du triangle.

4. visualisation geogebra

En vidéo projection, on peut montrer ce que cela donne avec l'utilisation de la fenêtre tableur de l'application GeoGebra.



5e - Calcul de la somme des mesures des angles d'un triangle avec le tableur de geogebra (Vidéo PeerTube)
Cette vidéo est un tutoriel qui montre comment faire calculer automatiquement avec le tableur de l'application GeoGebra, la somme des mesures des trois angles d'un triangle.

On affiche les trois angles du triangle avec des couleurs différentes en mettant une opacité de 100 et une taille de 100 par exemple pour augmenter la lisibilité.

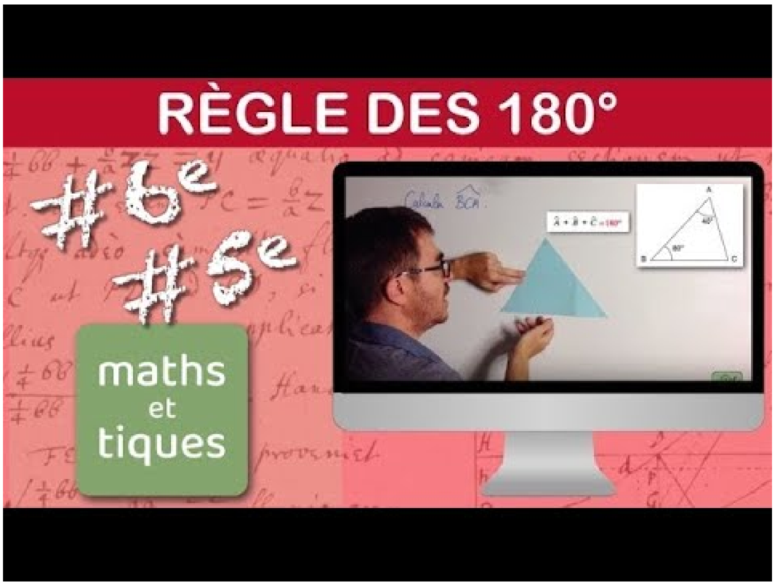
Remarque : si le nom des mesures des angles est composé d'une lettre grecque, on peut prendre le temps de les renommer pour être bien clair en les appelant a, b et c par exemple.

Ensuite, dans la fenêtre tableur, on utilise les cellules A1, B1 et C1 pour faire afficher les mesures a, b et c des angles avec les formules "=a", "=b" et "=c".
Il est essentiel à ce stade de prendre le temps de changer la forme du triangle en déplaçant les sommets et de montrer que l'affichage des mesures est mis à jour en temps réel. On peut aussi jouer sur les couleurs pour faciliter la correspondance entre les mesures des angles dans la fenêtre "graphique" et le report de ces mesures dans la fenêtre "tableur".
Ensuite, dans la cellule B3 par exemple, on demande l'affichage de la somme des mesures des trois angles avec la formule "=A1+B1+C1".
Le souci est que l'affichage va être fixe : 180°, mais qu'il est quand même dépendant de trois valeurs qui, elles, varient quand on change la forme du triangle. Pour arriver à faire comprendre que la somme est bien recalculée quand on change la forme du triangle, on peut par exemple faire afficher la somme de seulement deux angles pour bien montrer qu'elle change à chaque fois.
Il faudra peut-être éclaircir le fait que certains élèves n'ont pas trouvé 180° lors de leurs calculs que ce soit lors de la recherche papier ou la recherche avec l'application GeoGebra.
On peut demander à la classe s'ils ont des idées sur le pourquoi. Les réponses attendues étant que cela est dû à

l'imprécision des tracés, des mesures... à ce que GeoGebra n'affiche que des valeurs approchées... Tout ceci s'étant déroulé de manière expérimentale, il peut sembler normal de ne pas trouver exactement 180°.

5. Visualisation avec un découpage et un pliage (10 - 15 min)

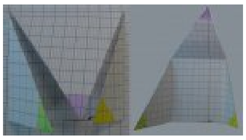
On peut rester dans le monde réel pour visualiser que cela fait 180° avec le découpage d'un triangle, puis des pliages.
Voici par exemple une vidéo qui montre ce pliage.



Appliquer la règle des 180° dans le triangle - Cinquième (Video Youtube)

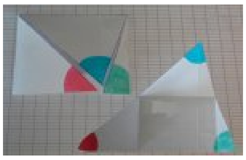
Pour le faire faire aux élèves, afin qu'ils gardent une trace dans leur cours, on peut le faire avec eux en donnant les consignes suivantes :

- **Prendre une feuille. (une pour quatre)** On peut avoir préparé des feuilles au format A4 (un peu plus qu'une pour quatre). On peut prendre des feuilles quadrillées pour simplifier la partie où il faut trouver le pied d'une hauteur. Sinon, on peut trouver le pied de la hauteur par pliage (il faut être assez habile) ou avec l'équerre.
- **Placer un point n'importe où sur la feuille.** Si on a fait le choix d'une feuille avec un quadrillage, on demande à ce que ce point se situe à une intersection. On demande aussi à ce que ce soit différents de ce que les voisins ont fait si possible.
- **Relier les quatre coins de la feuille à ce point.** Si les coins sont arrondis, redécouper les bords de la feuille.
- **Découper pour obtenir quatre triangles et se les répartir.** Les quatre triangles sont normalement différents si le point qui a été choisi n'a pas été placé sur un axe de symétrie.
- **Colorier les trois sommets recto verso, chacun avec une couleur différente**
- **Marquer le pied de la hauteur issue du point qui avait été choisi sur la feuille.** Consigne qui peut se décomposer à l'oral avec les étapes suivantes :
    - Orienter la feuille avec le bord qui n'a pas été découpé vers soi.
    - Partir de l'autre sommet et descendre tout droit jusqu'à ce bord. En suivant la ligne du quadrillage quand la feuille distribuée est quadrillée.
    - Marquer ce point.
- **Plier trois fois de telle manière que les sommets se retrouvent sur ce même point qui vient d'être marqué.** Je pense qu'il peut être utile de leur montrer sans aller jusqu'au bout, pour qu'un maximum d'élèves découvrent par eux-mêmes ce que l'on obtient en précisant bien que, quand on a fini, on garde pour soi le résultat pour ne pas gâcher le plaisir des autres. En attendant ceux qui ont le plus de difficultés, les plus rapides peuvent en faire un deuxième avec un triangle de forme différente, ils peuvent aussi être des élèves ressources ou faire une construction plus grande qui pourra être affichée au fond de la classe. De même, ils peuvent essayer avec une feuille blanche, faire un autre pliage avec le même triangle quand c'est possible...



Le triangle découpé plié puis déplié avec la marque du pied de la hauteur trouvée avec l'aide du quadrillage.

Seulement une fois qu'ils ont plié et déplié plusieurs fois leur construction et analysé un peu ce qu'il se passe, on peut montrer une construction finie assez grande (pour les élèves du fond) et engager un échange sur ce que l'on peut en déduire. Généralement, ils voient surtout que l'on est passé d'un triangle à un rectangle (une "enveloppe"). Il faut ensuite passer un peu de temps pour leur montrer que les trois angles forment un angle plat et que cela fonctionne pour les triangles de tous les élèves de la classe.
On peut ensuite leur demander si c'est une démonstration, si cela permet de généraliser le résultat, la réponse attendue étant négative : un pliage n'est pas une démonstration.

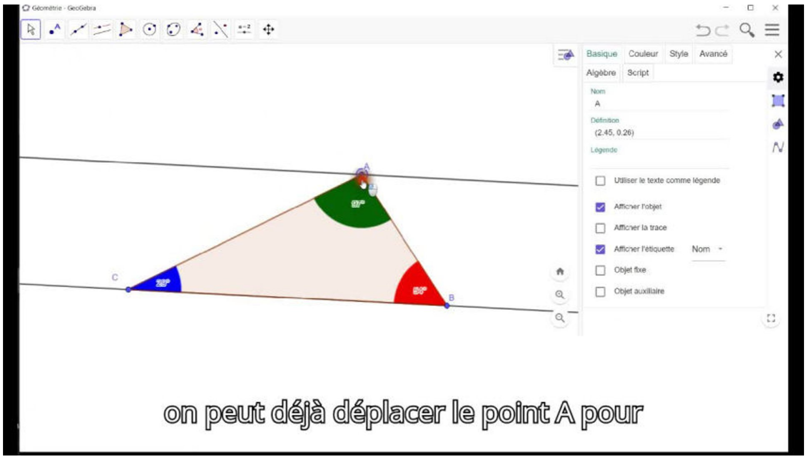


Le triangle découpé obtenu avec une feuille blanche plié puis déplié avec la marque du pied de la hauteur trouvée avec l'aide d'un pliage.

Le triangle découpé obtenu avec une feuille blanche plié puis déplié avec la marque du pied de la hauteur trouvée avec l'aide d'un pliage.

○ 6. Démonstration (5 - 10 min)

Le parti pris est de donner une démonstration à l'oral avec l'aide de l'application GeoGebra pour le support visuel.



5e - Démonstration : support visuel geogebra pour la somme des mesures des angles d'un triangle (Vidéo PeerTube)
Cette vidéo montre comment on peut créer un support visuel avec GeoGebra pour démontrer que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° en utilisant des angles alternes internes.

Pour cela, en vidéo projection, on reprend le triangle ABC construit avec l'application GeoGebra. Disons que l'on place A en "haut" de l'écran. On ajoute (BC) et la parallèle à (BC) passant par A de même que deux points sur cette parallèle de part et d'autre de A.
On peut demander s'il n'y aurait pas un angle de même mesure que l'angle de sommet B, s'ils ne reconnaissent pas une situation déjà vue. La réponse attendue étant qu'il y a un angle de sommet A alterne interne à cet angle et que comme les droites qui les forment sont parallèles, ils ont la même mesure. On affiche cet angle avec la même couleur et les mêmes caractéristiques et on peut déplacer le point A pour montrer que les mesures sont toujours égales. On fait de même avec l'angle de sommet C. On conclut.
On insiste bien sur le fait que l'on vient de **démontrer** à l'aide d'un raisonnement que, dans le monde parfait des mathématiques par opposition au monde réel avec toutes ses approximations, la somme des mesures des trois angles d'un triangle est exactement égale à 180°.

7. Conclusion pour le défi. (3 min)

Pour clôturer le défi, on peut laisser comme trace écrite qu'en fait, toutes les formes de triangles amènent à une somme des mesures des trois angles de 180° "normalement". La somme la plus grande que l'on puisse obtenir est donc de 180° puisque c'est la seule possible.
Pour éviter les frustrations, on peut dire que tous ceux qui ont trouvé des sommes proches de 180° ont gagné puisque dans la réalité, c'est très dur de retrouver ce résultat théorique avec toutes les approximations que l'on a au niveau des tracés et des mesures.

8. Trace écrite dans le cours. (5 - 10 min)

On peut écrire la question suivante :

> Qu'ont de particulier les mesures des trois angles d'un triangle ?

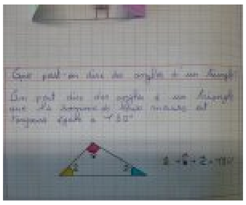
Avec la réponse suivante :

> Propriété : Les triangles ont de particulier que la somme des mesures de leurs trois angles est égale à 180°.

Si on tient à avoir un énoncé de type *"Si .. alors ... ."* on peut toujours faire écrire :

> **Si** un polygone est un triangle **alors** la somme des mesures de ses trois angles est égale à 180°.

On peut faire un schéma puis coller la partie rectangulaire du découpage précédent de telle sorte que les sommets puissent se replier.



Cahier d'élève avec une trace écrite possible concernant le résultat sur la somme des mesures des angles d'un triangle. Le pliage est collé juste au-dessus.

Pour terminer l'étude et vérifier la bonne assimilation de cette nouvelle propriété, on peut utiliser le site MathsMentales par exemple en vidéo projection ultérieurement pour faire des séries de questions flashs utilisant ce résultat :
- calcul de la mesure du troisième angle d'un triangle,
- calcul de la mesure d'un angle pour des cas particuliers de triangles.

Compétences travaillées

- **Compétences disciplinaires** :
  - Chercher
  - Représenter
  - Raisonner
  - Calculer
- **Compétences du CRCN** mises en œuvre par les élèves :
  - CRCN : consulter le tableau avec une entrée par compétence
-
  - Environnement numérique
    - Évoluer dans un environnement numérique

- **Compétences du CRCN-Edu** mises en œuvre par l'enseignant :
  CRCN-Edu : Domaines et compétences
  - Enseignement - Apprentissage
    - Mettre en œuvre
  - Diversité et autonomie des apprenants
    - Engager les apprenants
  - Compétences numériques des apprenants
    - Développer les compétences numériques des apprenants

Bilan critique de la séance

Cette approche expérimentale permet d'avoir un bon rythme avec une succession d'activités variées et des temps pour "souffler" : distribution, allumage, extinction et ramassage du matériel.
Il y a peu de possibilités d'avoir des problèmes techniques majeurs ce qui permet de rester concentré sur l'objectif.
Cette démarche permet en outre de réinvestir les angles alternes internes.
Pour les élèves qui sauraient déjà le résultat on peut adopter différentes stratégies :

- tenir compte de leurs connaissance et les prendre en charge différemment pour ne pas gâcher l'activité.
- leur poser des questions complémentaires : *Comment le savez-vous ? Est-ce que vous pouvez me le démontrer ? Certains de vos camarades ne trouvent pas 180° alors vous êtes sûr que c'est vrai ? Et avec les quadrilatères alors, que se passe-t-il ?...*
- On peut aussi préparer des fichiers GeoGebra en amont mais je ne l'ai jamais fait, les élèves ressources sont très efficaces et je trouve que c'est bien de leur montrer comment se construit une figure GeoGebra.
  La preuve mathématique s'avère très importante pour certains qui avaient trouvé plus de 180° à qui on doit bien expliquer la différence entre un résultat mathématique avec toute l'exactitude qui en découle et des mesures dans le monde réel avec toutes leurs imprécisions.

Portfolio