



Esprit critique et intuition : le paradoxe de Penney (niveau terminale)

publié le 27/05/2024

TraAM 2023-2024

Descriptif :

Cet article rend compte d'une expérimentation menée en option mathématiques expertes de Terminale au sujet d'un paradoxe probabiliste.

Sommaire :

- Fiche synoptique
- Narration de l'expérimentation

- *Expérimentation : Fabien Aoustin*
- *Rédaction : Fabien Aoustin*
- *Mise en forme finale : Raphaël Nivelles*

● Fiche synoptique

○ Thématique

Probabilités, simulations, pile ou face, paradoxe de Penney, graphes probabilistes

○ Niveau concerné

Terminale, option mathématiques expertes

○ Problématique

Comment apprendre à se méfier de ses intuitions ? Comment les dépasser ?

○ Contenu

- Simulation d'une expérience aléatoire
- Modéliser une situation par un graphe probabiliste
- Rechercher un état stable
- Formule des probabilités totales et somme des termes d'une suite géométrique

○ Nombre d'heures utilisées

- Une séance de deux heures (mais trois heures seraient préférables)

○ Compétences du CRCN travaillées

- 1. Information et données :
 - 1.2 Gérer des données ;
 - 1.3 Traiter des données
- 3. Création de contenus :
 - 3.4 programmer ;
- 5. Environnement numérique :

- 5.2 Évoluer dans un environnement numérique ;

○ Outils et ressources

- Papier, crayon
- Programmation sous Python en salle informatique
- Utilisation d'une intelligence artificielle ([Perplexity](#))
- Document élève ci-joint

 [Document élève pour l'expérimentation sur le paradoxe de Penney en maths expertes](#) (PDF de 64.5 ko)
Document distribué aux élèves de l'option maths expertes lors de l'expérimentation sur le paradoxe de Penney

► Page suivante : "*Narration de l'expérimentation*"

● Narration de l'expérimentation

Cette activité a été proposée en fin de séquence sur les graphes et les matrices. Le but principal était d'apprendre à se méfier de nos premières intuitions dans le contexte des probabilités. C'était l'occasion de mobiliser à nouveau quelques éléments croisés auparavant en jouant sur plusieurs registres (simulations informatiques, recours à l'algorithmique et la programmation, modélisation par un graphe probabiliste, etc.).

○ Séance

Mise en place

Le document de travail est distribué dès le début et se présente sous forme classique pour n'éveiller aucun soupçon sur le fait que plusieurs résultats étonnants vont être présentés. À l'oral, il est indiqué que le but est de mobiliser à nouveau des notions rencontrées durant les séances précédentes tout en saisissant l'occasion de travailler l'algorithmique et la programmation.

Les élèves sont en salle informatique mais on alterne les phases de recherche individuelle (sur ordinateur ou non) et collective.

Déroulement

Une première approche du problème

Une fois le document distribué, la première partie a été traitée collectivement à l'oral, les élèves prenant en note les réponses. Aucune difficulté n'est apparue ici, le but était en quelque sorte d'endormir tout soupçon chez les élèves. Pour la partie II, la réponse à la question 1 a été survolée aussi rapidement que la partie I ; aucun élève n'a soupçonné une erreur possible ici. Le recours à la simulation informatique a été présenté comme un entraînement à l'algorithmique et à la programmation ce qui a été bien accueilli aussi bien par certains élèves en difficulté sur ce point en spécialité que par ceux qui suivent par ailleurs l'enseignement de NSI.

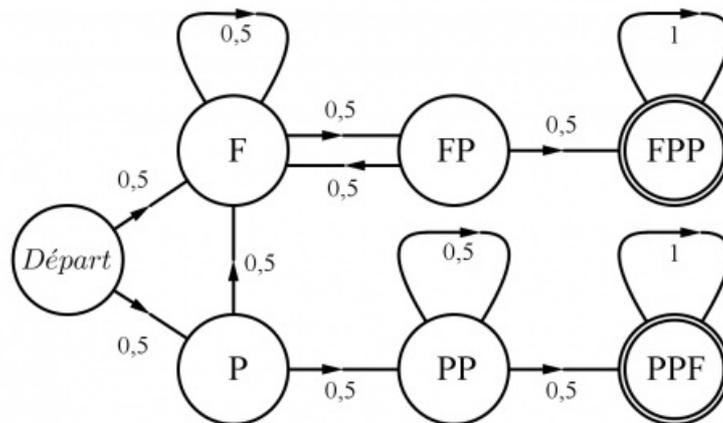
La question 2 a été l'occasion de travailler tout particulièrement la précision et la clarté de l'expression orale et d'évoquer à nouveau les booléens. La parole des élèves les moins à l'aise avec la programmation sous Python a été privilégiée. La question 3 a été résolue collectivement puis le programme a été saisi par chaque élève sur son poste. Pour gagner un peu de temps, une version non complétée du programme était disponible sur l'espace commun du groupe. Les résultats obtenus ont tout de suite étonné les élèves. Plusieurs se sont demandés où était l'erreur dans le programme. Quelques-uns (très minoritaires) se sont même demandés si le souci ne venait pas de la fonction `choice` de Python. Puisque le résultat était inattendu, il a été naturel de proposer une approche plus classique du problème pour s'assurer que chacun des deux joueurs avait la même probabilité de gagner (ce qui s'avérera faux, bien sûr).

Une mise en perspective des connaissances sur les graphes probabilistes

La partie III ne fait pas du tout appel à l'outil informatique, si ce n'est un petit calcul matriciel à la calculatrice. La question 1, qui sort nettement du cadre habituel des graphes probabilistes à deux ou trois états où la modélisation de la situation est donnée ou évidente, a demandé un intense travail collectif au vidéoprojecteur. Il a fallu à la fois identifier les états pertinents, supprimer des propositions inutiles et être particulièrement vigilant sur les arêtes à

dessiner. Rappeler que la somme des probabilités inscrites sur les arêtes sortantes doit être égale à 1 a permis de rectifier plusieurs oublis.

Voici le graphe finalement obtenu :



Graphe probabiliste modélisant la situation du paradoxe de Penney, établi en classe avec les élèves.

Cette phase, d'habitude quasiment triviale, a interpellé bon nombre d'élèves.

Le calcul de π_{10} n'a posé aucun problème particulier mais a permis de se rendre compte qu'il n'y avait peut-être pas d'erreur dans le programme, comme certains le pensaient encore.

La question 3 a été l'occasion d'un petit calcul à la main moins spectaculaire qu'il n'y paraît au départ. Surtout, il a permis de se détacher des situations classiques à deux ou trois états et où l'état stable est unique. Enfin, la question 4 a été résolue collectivement au tableau. En plus d'apporter une réponse étonnante au problème étudié, elle a permis de mobiliser plusieurs éléments du programme de spécialité et de décroisonner la vision du programme par chapitres que les élèves ont en tête. Il a fallu en effet calculer la limite d'une somme des termes d'une suite géométrique (en signalant que c'était là une application de la formule des probabilités totales).

Une exploration du paradoxe

L'activité aurait pu s'arrêter là mais la curiosité des élèves était piquée et il était tentant d'explorer un peu plus la situation. Les élèves ont travaillé ici seul ou en binôme et ont juste modifié leurs programmes. Une différenciation était possible pour pousser les élèves les plus à l'aise à vérifier que la conjecture émise expérimentalement était conforme à la modélisation par un graphe probabiliste. Le calcul pour le match PPF-PFF est plus difficile à justifier et aucun élève ne s'est lancé dans l'aventure ; la question est intéressante mais l'objectif n'était pas là.

En passant dans les rangs, l'enseignant s'est assuré que les élèves identifiaient bien les situations identiques (à permutation près de Pile et Face).

Ici, une nouvelle situation étonnante apparaît : il n'est pas possible de classer les quatre séquences proposées (la première l'emporte sur la deuxième, qui l'emporte sur la troisième, qui l'emporte sur la quatrième, qui l'emporte sur... la première). L'effet de ce paradoxe semble avoir été moins spectaculaire aux yeux des élèves que celui des parties II et III.

Un nouveau paradoxe

Dans cette partie, on s'intéresse au temps d'attente moyen d'une séquence. Le calcul de ce temps d'attente est délicat en fin de terminale. Le recours à une simulation est pertinent mais l'écriture d'un programme en autonomie est difficile aussi, y compris pour des élèves suivant la spécialité NSI. Il leur a donc été proposé de recourir à l'utilisation d'une intelligence artificielle pour produire un tel programme ([Perplexity](#) en l'occurrence).

L'exercice s'est révélé intéressant à plus d'un titre. Il a d'abord fallu soigner la demande et la reformuler plusieurs fois. Ensuite, il a fallu comprendre la réponse obtenue, la tester, et souvent la modifier. Les échanges entre les élèves ont été particulièrement riches car tous n'avaient pas obtenu le même programme. Certains se retrouvaient avec des propositions absconses qui semblaient efficaces mais difficilement modifiables et en lesquelles il était difficile d'avoir pleinement confiance faute de les comprendre. D'autres ont obtenu des programmes plus simples à comprendre (et bien commentés) et surtout facilement rectifiables ou modifiables.

Faute de temps, l'enseignant a dû reprendre la main collectivement au tableau en exploitant le programme bien abouti d'un élève pour les questions 3 et 4. Le résultat inattendu (une séquence ayant un temps d'attente moyen plus long peut avoir une probabilité de gain plus forte qu'une séquence ayant un temps d'attente moyen plus court) a davantage perturbé les élèves que les précédents. Totalement contraire à l'intuition, il a permis aux élèves de retenir que toute question, même celles dont la réponse semble évidente, mérite une réflexion posée.

○ Conclusion de l'activité proposée

Les élèves ont beaucoup aimé être surpris et voir leurs intuitions contredites, surtout sur un sujet aussi commun que le jeu « Pile ou Face ». Le recours à des outils pratiques ou théoriques variés a été particulièrement fécond. En revanche, un rythme moins soutenu sur la fin est nécessaire pour que la dernière partie soit vraiment profitable. Une heure supplémentaire aurait été la bienvenue pour l'ensemble de l'activité mais impose alors des conditions de travail particulières (notamment la disponibilité d'une salle informatique). L'esprit critique est sollicité à la fois pour remettre en question ses premières intuitions et aussi dans le traitement des réponses apportées par l'intelligence artificielle et l'analyse de ses propres requêtes.

Sondés après cette activité, les élèves ont apprécié « *travailler autrement* » et trouvé l'activité « *intéressante car l'on ne s'attend pas à ce résultat* » ; c'était pour eux « *une véritable découverte au niveau mathématique* » qui a permis de « *revoir l'idée [qu'ils se faisaient] des probabilités notamment lors des cours de spécialité maths* ». En particulier, « *le fait d'utiliser l'intelligence artificielle pour répondre à une des questions était amusant* » et plusieurs ont trouvé les aspects liés à Python profitable « *car [il ne s'y] connais[sent] pas beaucoup en informatique.* »

Enfin, l'objectif principal était rempli car ils ont retenu que « *l'intuition n'est pas toujours la bonne* », qu'il faut souvent « *aller au-delà de notre raisonnement logique de base* » et qu' « *en conclusion, il est nécessaire de réfléchir avant d'agir car ce qui nous paraît logique ne l'est pas forcément.* »

○ Prolongements envisagés

Plusieurs prolongements peuvent être envisagés, soit collectivement, soit dans le cadre d'une différenciation si le temps consacré à l'activité (conditionné par l'accès à une salle informatique) peut être plus long. On peut par exemple s'intéresser au calcul des probabilités de gain pour le match PFF-PFF ou au calcul d'un temps d'attente moyen de certaines séquences simples.

Ce travail peut aussi donner lieu à des exploitations dans le cadre du Grand Oral. Le sujet présente l'intérêt d'aborder des questions qui éveilleront la curiosité des deux jurés et dont les réponses ne manqueront pas de les étonner. Dans cette optique, il a été signalé que ce problème était connu sous le nom de « paradoxe de Penney ». Ce nom n'a pas été donné avant afin d'éviter toute recherche en ligne au cours de l'activité et qui viendrait dévoiler trop tôt certains résultats. Dans le cadre du Grand Oral, et notamment pour les élèves intéressés par les aspects informatiques, il peut aussi s'avérer séduisant de s'intéresser aux générateurs pseudo-aléatoires (dont certains utilisent des nombres de Mersenne).

 [Document élève pour l'expérimentation sur le paradoxe de Penney en maths expertes](#) (PDF de 64.5 ko)

Document distribué aux élèves de l'option maths expertes lors de l'expérimentation sur le paradoxe de Penney



**Académie
de Poitiers**

Avertissement : ce document est la reprise au format pdf d'un article proposé sur l'espace pédagogique de l'académie de Poitiers.

Il ne peut en aucun cas être proposé au téléchargement ou à la consultation depuis un autre site.