CONCOURS GÉNÉRAL 1998

Exercice 1

Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes :

1. les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales
2. $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.

Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier n, la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul, tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

Exercice 3

Pour tout réel x on note $E(x)$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Soit k un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = n + E(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}})$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

Exercice 4

On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables, A sur D_1 et B sur D_2, tels que le point M appartienne au segment $[A, B]$.

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)

(1) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale. Construire les points A et B ainsi déterminés.

(2) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle le périmètre du triangle OAB est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles OAM et OBM, ainsi que la relation :

$$\frac{AM}{\tan\frac{\widehat{OAM}}{2}} = \frac{BM}{\tan\frac{\widehat{OBM}}{2}}$$

Construire les point A et B ainsi déterminés.

Exercice 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble A de n points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.
Montrer qu'il existe un ensemble S de $2n - 5$ points du plan tel que pour tout triangle dont les sommets sont des points de A il existe au moins un point de S qui lui soit strictement intérieur.