CONCOURS GÉNÉRAL 1997

Corrigé : Jean-Michel SARLAT

$\boxed{1}$ On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.
Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y-a-t-il de choix possibles ?

On somme les points sur les jetons á partir d'un sommet pris au hasard en effectuant un tour complet dans le sens trigo et on repère un sommet où le minimum de cette somme a été atteint ; il en existe au moins un, il est alors facile de vérifier qu'en partant du sommet qui suit on peut ramasser les 1997 jetons sans que leur somme soit strictement négative et plus : si l'on part du dernier minimum alors la somme cumulée sera toujours strictement positive. Il y a donc un et un seul parcours possible !
Pour être plus précis : Soit $u_1, u_2, \ldots, u_{1997}$ les valeurs des sommets indexés dans le sens trigo avec une origine arbitraire. Soit $p \in [\![\, 1, 1997 \,]\!]$ tel que :

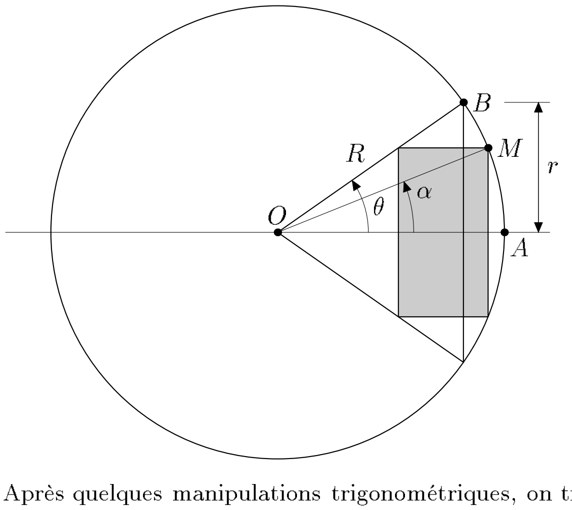
[1] $$\forall q \in [\![\, 1, 1997 \,]\!],\ s_q \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{q} u_i \geqslant \sum_{i=1}^{p} u_i = s_p$$

On change maintenant l'indexation en posant $v_k = u_{p\tilde{+}k}$ pour $k = 1 \ldots 1997$ avec la convention :

$$p\tilde{+}k = \begin{cases} p+k & \text{si} \quad p+k \leqslant 1997 \\ p+k-1997 & \text{si} \quad p+k > 1997 \end{cases}$$

On a alors : $\sum_{i=1}^{k} v_i = \begin{cases} s_{p+k} - s_p \geqslant 0 & \text{si} \quad p+k \leqslant 1997 \\ 1 + s_{p+k-1997} - s_p > 0 & \text{si} \quad p+k > 1997 \end{cases}$ puisque $s_{1997} = 1$.
Le fait de prendre le plus grand des nombres p tel que [1] assure l'inégalité stricte dans le premier cas ci-dessus. . .

$\boxed{2}$ Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre O, de rayon R, et un cône de sommet O qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon r.
Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant même axe de révolution ?



La figure représente la section des solides suivant un plan contenant l'axe de symétrie du cône. En prenant l'angle α comme paramètre (avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \theta$), le volume du cylindre est égal á :

$$V = \frac{\pi R^3 \sin^2 \alpha}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha)$$

Sur $]0, \theta[$, V est dérivable par rapport á α et :

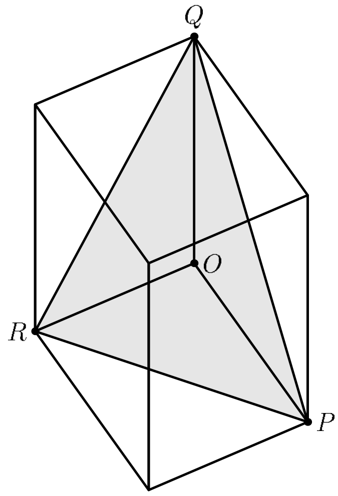
$$\frac{dV}{d\alpha} = V \left(\frac{2}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan(\theta - \alpha)} \right)$$

L'expression entre parenthèses varie continûement en décroissant de $+\infty$ á $-\infty$ lorsque α varie de 0 á θ ; V possède donc un maximum absolu, α vérifiant alors : $\tan \alpha = 2 \tan(\theta - \alpha)$.

Après quelques manipulations trigonométriques, on trouve : $V = \dfrac{\pi R^3 \sin^2 \alpha}{3 \cos \alpha} = \dfrac{\pi R^3 \tan^2 \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ puis en montrant que : $\tan \alpha = \dfrac{4 \tan \theta}{\sqrt{9 + 8 \tan^2 \theta} + 3} = \dfrac{4r}{\sqrt{9R^2 - r^2} + \sqrt{9R^2 - 9r^2}}$, on détermine enfin le volume maximal :

$$V = \frac{16 \pi R^3 r^2}{\left(\sqrt{9R^2 - r^2} + \sqrt{9R^2 - 9r^2}\right) \sqrt{18R^2 + 6r^2 + 6\sqrt{(9R^2 - r^2)(R^2 - r^2)}}}$$

$\boxed{3}$ C est un cube d'arête 1 et p est la projection orthogonale sur un plan. Quelle est la valeur maximale de l'aire de $p(C)$?



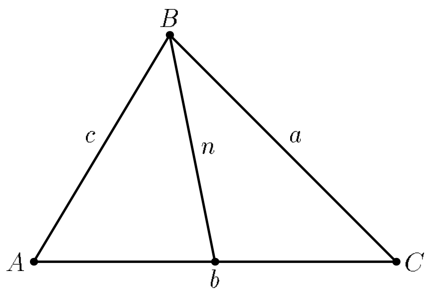
La projection orthogonale du cube est un hexagone en général, un carré (hexagone avec sommets confondus) dans le cas particulier où l'une des faces est parallèle au plan sur lequel on projette.
On considère un sommet du cube dont la projection O est á l'intérieur de l'hexagone, il en existe au moins un (deux en général). On note P, Q et R les projections de ses sommets voisins (liés par une arête).
L'aire de $p(C)$ est égale au double de l'aire du triangle PQR ; celui-ci est la projection d'un triangle équilatéral T de côté $\sqrt{2}$, son aire est maximale lorsque T est parallèle au plan sur lequel on projette (ce qui est réalisable) et elle vaut alors $\sqrt{3}/2$ ($p(C)$ est dans ce cas un hexagone régulier).

L'aire maximale de $P(C)$ est $\sqrt{3}$

$\boxed{4}$ Étant donné un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs de ses côtés et m, n, p les longueurs de ses médianes. Pour tout réel α strictement positif, on définit le réel $\lambda(\alpha)$ par la relation

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = (\lambda(\alpha))^\alpha (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha)$$

1. Calculer $\lambda(2)$.
2. Calculer la limite de $\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
3. Á quelle condition portant sur a, b, c le réel $\lambda(\alpha)$ est-il indépendant de α ?



En introduisant le milieu K de $[AC]$, on montre facilement (*théorème de la médiane*) :

$$BA^2 + BC^2 = 2BK^2 + \frac{AC^2}{2}$$

Ceci s'écrit $c^2 + a^2 = 2n^2 + \frac{b^2}{2}$, il y á deux autres égalités semblables, après addition membre á membre on trouve :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m^2 + n^2 + p^2) \text{ donc } \lambda(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

En général : $\ln(\lambda(\alpha)) = \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha}{m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha}$. La limite ℓ de $\lambda(\alpha)$ en 0, si elle existe, ne se calcule donc pas directement (indétermination). On se prête donc á quelques réécritures :

$$\ln \lambda(\alpha) = \frac{\ln(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha) - \ln 3}{\alpha} - \frac{\ln(m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha) - \ln 3}{\alpha}$$

$$\frac{\ln(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha) - \ln 3}{\alpha} = \frac{\ln(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha) - \ln 3}{(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha) - 3} \times \left[\frac{(a^\alpha - 1)}{\alpha} + \frac{(b^\alpha - 1)}{\alpha} + \frac{(c^\alpha - 1)}{\alpha}\right]$$

Les quotients dans le crochet ont pour limites respectives en 0 : $\ln a$, $\ln b$ et $\ln c$. Le quotient qui précède le crochet a pour limite $\frac{1}{3}$ (nombre dérivé de ln en 3), donc :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha) - \ln 3}{\alpha} = \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c) = \ln \sqrt[3]{abc}$$

De la même faҫn on détermine la limite de l'expression relative á m, n et p. D'où :

$$\lim_{\alpha \to 0} \ln \lambda(\alpha) = \ln \sqrt[3]{abc} - \ln \sqrt[3]{mnp} = \ln \sqrt[3]{\frac{abc}{mnp}}$$

et

$$\lim_{\alpha \to 0} \lambda(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{abc}{mnp}}$$

Une condition pour que $\lambda(\alpha)$ soit indépendant de α est que la limite en 0 soit égale á $\lambda(2)$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt[3]{\frac{abc}{mnp}} \quad &\iff \quad 27a^2b^2c^2 = 64m^2n^2p^2 \\
&\iff \quad 27a^2b^2c^2 = (2c^2+2b^2-a^2)(2b^2+2a^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2) \\
&\iff \quad (a^2+b^2-2c^2)(b^2+c^2-2a^2)(c^2+a^2-2b^2) = 0
\end{aligned}$$

Les relations établies au début ont été utilisées pour passer de la première ligne á la seconde. La factorisation s'obtient facilement dès que l'on remarque (...) que la condition $a^2+b^2=2c^2$ réalise l'égalité.
La condition $(a^2+b^2-2c^2)(b^2+c^2-2a^2)(c^2+a^2-2b^2)=0$ est **nécessaire** pour que $\lambda(\alpha)$ soit indépendant de α, on prouve qu'elle est **suffisante** en vérifiant que si elle est réalisée (avec $a^2+b^2=2c^2$ par exemple), alors :

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ n = \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ p = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

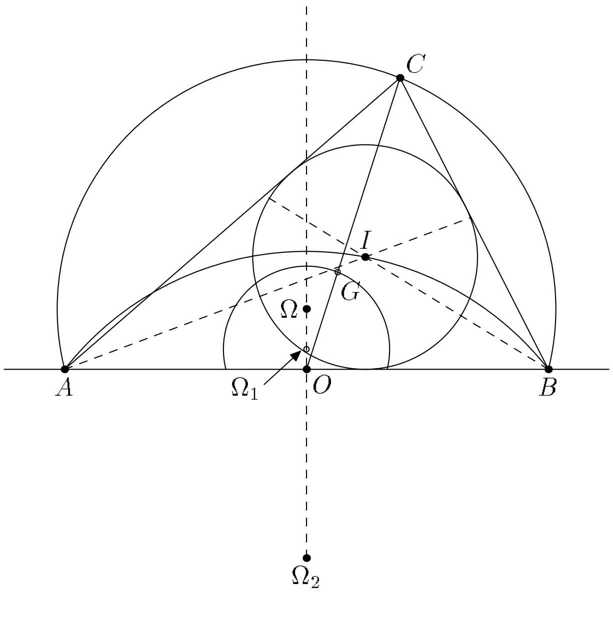
Ceci assure l'indépendance de $\lambda(\alpha)$ par rapport á α !

$\boxed{5}$ Dans le plan, soient A et B deux points distincts. Pour tout point C extérieur à la droite (AB), on note G l'isobarycentre du triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit.

1. Soit α un réel tel que $0<\alpha<\pi$. Quel est l'ensemble Γ des points C tels que

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \alpha + 2k\pi$$

   k étant un entier ? Lorsque C décrit Γ, montrer que G et I décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.
2. On suppose désormais que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Comment doit-on choisir C dans Γ pour que la distance GI soit minimale ?
3. On note $f(\alpha)$ la distance minimale GI de la question précédente. Expliciter $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et α. Déterminer la valeur maximale de $f(\alpha)$ lorsque α décrit $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$.



L'ensemble Γ est l'un des deux arcs délimités par A et B du cercle dont le centre Ω est situé sur la médiatrice de $[AB]$ tel que

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2\alpha \text{ á } 2\pi \text{ près}$$

Dans le cas qui nous intéresse ici $(0<\alpha<\pi)$, c'est l'arc situé *au dessus* de la droite (AB).

- Soit O le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. G est l'image de C dans une homothétie h donc : lorsque C décrit l'arc Γ, G décrit l'arc de cercle Γ_1 de centre Ω_1 image de Γ par h.
- On a : $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \pi - (\pi-\alpha)/2 = \pi/2 + \alpha/2$ á 2π près, compte tenu de la propriété de la somme des angles d'un triangle et du fait que $0<\alpha<\pi$. L'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ est donc constant : lorsque C décrit Γ, le point I se déplace sur un arc Γ_2 de centre Ω_2 (construction semblable á celle de Γ) délimité par A et B, on vérifie qu'en réalité il le décrit puisque á partir de tout point de cet arc on peut construire un point C dont il sera le point I.

Après calculs :

$$\overline{O\Omega} = \frac{a}{2}\cot\alpha,\ \overline{O\Omega_1} = \frac{a}{6}\cot\alpha,\ \overline{O\Omega_2} = -\frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$$

Les centres des cercles sont situés sur la médiatrice de $[AB]$ que l'on oriente positivement du côté de C, les rayons des cercles sont respectivement :

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \quad R_1 = \frac{a}{6\sin\alpha} \quad R_2 = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

De cela on déduit : $\Omega_1\Omega_2 = \dfrac{a}{2}\dfrac{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin\alpha}$ et $R_2 - R_1 = \dfrac{a}{2}\dfrac{6\sin\frac{a}{2}-1}{3\sin\alpha}$. On peut donc préciser la position relative des arc Γ_1 et Γ_2 lorsque $\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$, en observant que dans ce cas :

$$R_2 - R_1 > 0 \text{ et } (R_2-R_1) - \Omega_1\Omega_2 = a\frac{(2\sin\frac{\alpha}{2}-1)(1-\sin\frac{\alpha}{2})}{3\sin\alpha} > 0$$

L'arc Γ_1 est *intérieur* á Γ_2, ils ne peuvent être sécants. Le minimum de la distance qui sépare G de I est au moins égal á la distance minimale qui sépare un point du cercle qui supporte Γ_1 avec un point du cercle qui supporte Γ_2, celle-ci est atteinte lorsque C se trouve être situé sur la médiatrice de $[AB]$ (ligne des centres de Γ_1 et Γ_2) !

$$f(\alpha) = a\frac{(2\sin\frac{\alpha}{2} - 1)(1 - \sin\frac{\alpha}{2})}{3\sin\alpha}$$

Pour la recherche du maximum de $f(\alpha)$, on pose $t = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ et $g(t) = \dfrac{(2t-1)(1-t)}{t\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{(2t-1)\sqrt{1-t}}{t\sqrt{1+t}}$. On est conduit á rechercher le maximum de g pour $t \in]0.5, 1[$. On est enfin libéré des fonctions trigonométriques et pour que tout ceci ne soit pas au prix de manipulations délicates de radicaux, nous allons utiliser les *dérivées logarithmiques* : g est dérivable et strictement positive sur $]0.5, 1[$.

$$\forall t \in]0.5, 1[,\ g'(t) = g(t)\left(\frac{2}{2t-1} - \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2(1+t)}\right) = g(t)\frac{-3t^2 + t - 1}{(2t-1)(1-t^2)}$$

La dérivée de g ne s'annule que pour la valeur $t_0 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ dans $]0.5, 1[$, g atteint en ce point un maximum (signe de la dérivée).
En étant persévérant, on atteint enfin :

$$\max \pi/3 < \alpha < \pi f(\alpha) = \frac{a}{36}\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}\left(4 - \sqrt{13}\right) \approx 0.04213625.. \times a$$
