

ACTIVITÉ – Pile ou Face : un filou passe...

Dans toute cette activité, on considère qu'on dispose d'une pièce bien équilibrée.

PARTIE I : Une situation classique

On lance trois fois de suite une pièce et on note les résultats dans l'ordre.

Huit joueurs parient chacun sur une issue différente.

1) Quelles sont les issues choisies par les huit joueurs ?

2) Quel joueur a le plus de chances de gagner ?

PARTIE II : Avec deux joueurs seulement

On lance toujours une pièce et on note les résultats dans l'ordre.

Cette fois-ci, il n'y a que deux joueurs. On lancera donc la pièce jusqu'à ce que la séquence choisie par un des deux joueurs apparaisse.

Prenons l'exemple où Alice parie sur FPP et Bob parie sur PPF.

1) Un des deux joueurs a-t-il plus de chance de l'emporter ?

On simule maintenant des parties de ce jeu à l'aide du programme Python ci-dessous.

```
1 from random import*
2 def Alice_gagne(seq_Alice,seq_Bob):
3     lancer1=choice("PF") # on choisit au hasard P ou F
4     lancer2=choice("PF")
5     lancer3=choice("PF")
6     sequence=lancer1+lancer2+lancer3
7     while sequence!=seq_Alice and sequence!=seq_Bob:
8         lancer=choice("PF")
9         sequence=sequence[1]+sequence[2]+lancer
10    return(sequence==seq_Alice)
11
12 Victoires_Alice=_____
13 for k in range(10000):
14     if Alice_gagne(_____,_____):
15         Victoires_Alice=_____
16 print(_____)
```

2) Que permettent de faire les lignes 1 à 10 du programme Python ci-dessus ?

3) Compléter les lignes 12 à 16 du programme ci-dessus afin de simuler 10 000 parties du jeu et d'afficher la proportion de parties gagnées par Alice avec la séquence FPP (contre la séquence PPF pour Bob).

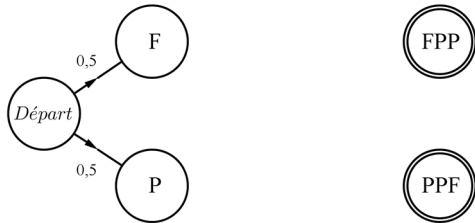
4) Que constate-t-on quand on exécute ce programme ?

PARTIE III : Le match FPP-PPF avec un graphe probabiliste

On considère toujours le jeu où Alice parie sur la séquence FPP et Bob sur la séquence PPF.

1) Compléter le graphe ci-dessous modélisant le jeu.

Donner ensuite la matrice de transition M associée à ce graphe.
Les sommets seront considérés dans l'ordre alphabétique.



2) On note π_n l'état probabiliste au bout de n lancers.

Donner l'état probabiliste initial π_0 puis calculer π_3 et π_{10} .

3) Soit π un état stable du graphe.

Montrer qu'il existe un réel t tel que $\pi = (0 \ 0 \ 0 \ 1-t \ 0 \ 0 \ t)$.

4) Décrire tous les chemins menant du sommet de départ au sommet PPF.

En déduire la probabilité que le match se termine par une victoire de Bob (PPF).

Est-ce cohérent avec le résultat final de la partie II ?

PARTIE IV : D'autres matchs...

1) En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, conjecturer les valeurs des probabilités de victoire de chacun de deux joueurs dans le match PPF-PFF.

On admettra que cette conjecture est juste.

2) En exploitant les résultats précédents, déterminer les probabilités de victoire de chacun de deux joueurs dans le match PFF-FPP.

3) Lucas constate que :

- dans le match FPP-PPF, c'est FPP qui a le plus de chance de l'emporter ;
- dans le match PPF-PFF, c'est PPF qui a le plus de chance de l'emporter ;
- dans le match PFF-FPP, c'est PFF qui a le plus de chance de l'emporter.

En exploitant les résultats précédents, déterminer lequel des deux joueurs a le plus de chances de l'emporter dans le match FPP-FPP.

PARTIE V : Temps d'attente d'une séquence

On appelle temps moyen d'attente d'une séquence S le nombre moyen de fois qu'il faut lancer la pièce pour obtenir S .

1) Écrire un programme Python permettant d'estimer le temps d'attente moyen d'une séquence donnée après avoir simulé 100 000 fois l'expérience.

On pourra recourir à l'aide d'une intelligence artificielle pour concevoir ce programme.

2) Estimer les temps d'attente moyen de toutes les séquences de longueur 3.

3) Soient S et S' deux séquences de longueur trois telles que S l'emporte face à S' avec une probabilité supérieure ou égale à 50 %.

Que peut-on conjecturer à propos des temps moyen d'attente de S et S' ?

Vérifier cette conjecture à l'aide des programmes précédents.

4) En modifiant les programmes, vérifier cette conjecture avec les séquences PFPF et FPFF.