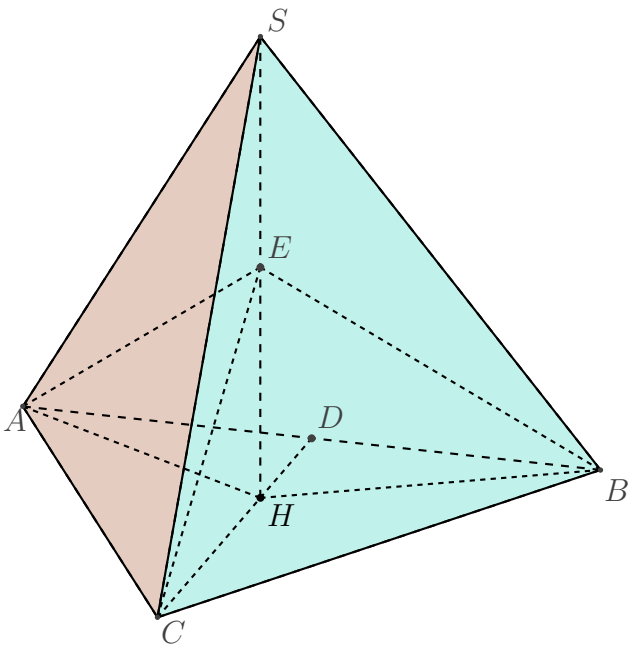
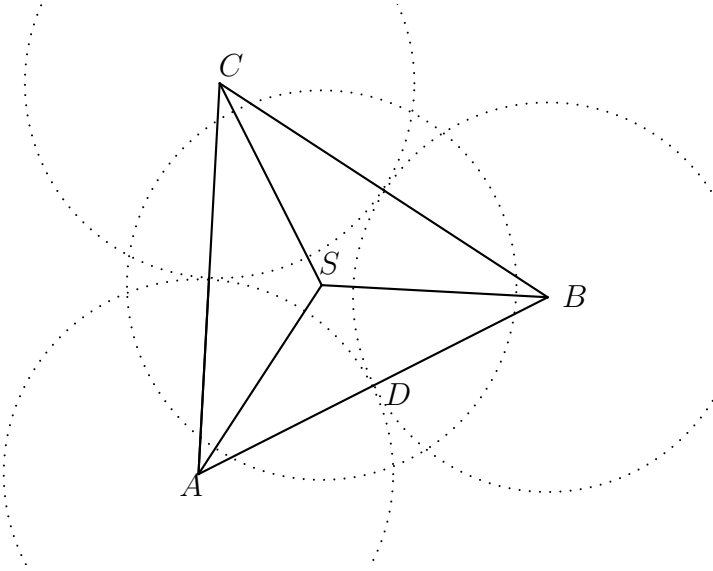
Corrigé du sujet n° 1

Soient A, B, C et S les centres des quatre boules, ces centres forment les sommets d'un tétraèdre régulier. On appelle E le centre de la boule dont on cherche le rayon r et D le milieu de $[AB]$. Chaque boule a un rayon qui est égal à 1.
On a donc $AB = BC = AC = 2$. On applique le Théorème de Pythagore au triangle CDB rectangle en D, on obtient : $CD = \sqrt{3}$. L'aire du triangle ABC est $\dfrac{CD \times AB}{2} = \sqrt{3}$.
On remarque que $3\mathcal{A}(CHB) = \mathcal{A}(ABC)$(on peut aussi utiliser la propriété du centre gravité ici $HD = \dfrac{1}{3}CD$), donc $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{HD \times AB}{2}$, d'où $HD = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Dans le triangle SHD rectangle en H, on a : $HS^2 + HD^2 = DS^2$,
d'où $HS = \sqrt{3 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
On applique deux fois le théorème de Pythagore dans les triangles HDB rectangle en D et EHB rectangle en H, on obtient :
$HB^2 = HD^2 + DB^2$ et $EB^2 = EH^2 + HB^2$, d'où
$EB^2 = EH^2 + HD^2 + DB^2$, or $EB = ES = EA = EC = SH - HE$,
donc $HE = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ après un calcul élémentaire. Finalement $SE = HS - HE = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Ainsi on conclut que $r = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1$


S
E
A
D
H
B
C


C
S
B
D
A