Solution des nombres soulignés.

<u>0</u> ; 1 ; 2 ; <u>3</u> ; 4 ; <u>5</u> ; <u>6</u> ; 7 ; <u>8</u> ; <u>9</u> ; 10 ; <u>11</u> ; <u>12</u> ; 13 ; <u>14</u> ; <u>15</u> ; 16 ; <u>17</u> ; <u>18</u> ; 19 ; …

On peut faire la conjecture : pour $n \geqslant 2$, les nombres $3n$ et $3n + 2$ sont soulignés et $3n + 1$ ne l'est pas.

Démonstration : récurrence forte …..

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $\forall p \in [2 ; n]$, $3p$ est souligné, $3p+1$ est non souligné et $3p+2$ est souligné.

* $3\times2 = 6$ et 6 est souligné ; 7 est non souligné ; 8 est souligné. Donc <u>$\mathscr{P}_1$ est vraie</u>.

* Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie au rang n.
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, soit $3n+3$ est souligné, $3n+4$ est non souligné et $3n+5$ est souligné.

  - $3n+3 = (3n+1) + 2$ or $3n+1$ est non souligné et 2 est non souligné, donc la somme $3n+3$ est souligné.

  - Supposons $3n+4$ souligné. Alors $\exists$ i' et j' non soulignés tels que $i'+j' = 3n+4$.
    Mais d'après l'hypothèse de récurrence (i' et j' sont non souligné), $\exists$i et j tels que $i' = 3i+1$ et $j' = 3j+1$
    Alors : $i'+ j' = 3n+4$ soit $3i+1 + 3j+1= 3n+4$ soit $3(i+j)+2 = 3n+4$ soit $i+j = n + 2/3$
    Or $i+j$ $\mathbb{N}$ et $n+ 2/3 \notin \mathbb{N}$ d'où contradiction. Donc $3n+4$ est non souligné.

  - $3n+5 = (3n+4) + 1$ or $3n+4$ est non souligné et 1 est non souligné, donc la somme $3n+5$ est souligné.

  <u>Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie</u>.

* Donc par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

<u>**Réponse**</u> : $2014 = 671 \times 3 + 1$, donc d'après la propriété <u>**2014 n'est pas souligné**</u>.

Remarque : comme la démonstration est difficile, il peut être intéressant de faire un algorithme où on va associer un nombre à son état (souligné ou non) dans un tableau et ainsi répondre à la question pour 2014.

```
Variables
        T tableau
Entrée
        Saisir N ⩾ 6.
Traitement
        T(0) = S ("souligné")
        T(1) = NS ("non souligné")
        T(2) = NS
        T(3) = S
        T(4) = NS
        T(5) = S
        Pour k = 6 à N
                T(k) = NS (initialisation de l'état de k)
                Pour j = 1 à E(k/2)  (partie entière)
                        Si T(j) = NS et T(k-j) = NS
                        Alors   T(k) = S
                                j = E(k/2)  (on a trouvé 2 valeurs NS, donc on arrête la boucle)
                        Fin si
                Fin pour
        Fin de pour
Sortie
        Afficher N, T(N).
```