Quelques exemples de devoirs d'arithmétique proposés en 98-99

Ces pages accueillent des textes de devoirs surveillés qui ont été donnés en TS en 98-99.

Etant donné qu'il s'agit de la première année d'enseignement de l'arithmétique en terminale, ces devoirs n'ont pas toujours donné entièrement satisfaction à leurs auteurs.

- Les textes ont été parfois trop longs et les énoncés pas toujours bien compris par les élèves.
- Faute de recul il a été parfois été délicat de prévoir le comportement des élèves face à certaines difficultés.
- L'algèbre intervient souvent et la faiblesse de certains élèves dans ce domaine bloque la résolution de certains exercices.

Il ne faut pas sombrer dans le pessimisme : il y a quand même des exercices qui ont bien marché et qui ont atteint leur objectif !

Texte 1

1. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 7 408 800. Quel est le nombre de ses diviseurs positifs ?

2. Calculer la somme des diviseurs positifs de 2^{999}.

3. Expliquer pourquoi a^3+1 est factorisable par $a+1$.
En déduire que $1\,998^{1\,998}+1$ n'est pas premier.

4. Démontrer que $10^{1\,998}-1$ est divisible par 99.
Combien de chiffres comporte le deuxième facteur ?

5. Soit N le produit de tous les nombres premiers de 1 à 1000.

- Démontrer que le nombre $N+2$ n'est pas premier, ni le nombre $N+3$, ni le nombre $N+121$, ni le nombre $N+539$.
- Soit K un entier positif de l'intervalle $[2\ ;\ 1000]$ et $p_1, p_2, \dots, p_n$ les entiers premiers inférieurs à 1000. De quelle façon sont constitués les diviseurs de K ?
En déduire que $N+K$ n'est pas premier.

On rappelle la formule : $a^{n+1}-1=(a-1)(a^n+\ \cdots\ +1)$.

durée : 1h *auteur : J-P Prigent* *Lycée Louis Armand Poitiers*

Texte 2

exercice 1

On considère le nombre $N = 2^n \times p$, n désignant un entier naturel et p un nombre premier.

1. a) Dresser la liste des $2(n+1)$ diviseurs de N.

b) Soit S la somme des diviseurs de N. Montrer que $\mathrm{S} = (1+p)(2^{n+1}-1)$.

2. a) Quelle relation n et p doivent-ils vérifier pour que N soit égal à la somme de ses diviseurs autres que N ?

b) Donner alors les trois plus petites valeurs de p pour qu'il en soit ainsi et calculer les valeurs correspondantes de N.

exercice 2

En effectuant la division euclidienne de l'entier naturel a par 45 on trouve l'entier q non nul comme quotient et $4\,q^2 - 3$ comme reste.
Quelles sont les valeurs possibles de a ?

exercice 3

1. On effectue la division euclidienne de l'entier n par 2. Quels sont les restes possibles? Même question pour dans la division euclidienne par 3?
2. Montrer que si n n'est pas pair alors $n^2 + 5$ est pair.
   Démontrer de même que si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 + 5$ est divisible par 3.
3. Déduire des questions précédentes que pour tout entier n, l'entier $n(n^2+5)$ est divisible par 6.

exercice 4

En divisant 13875 et 949 par le même entier d on trouve respectivement 15 et 13 pour restes.

1. Montrer que d est un diviseur commun à 13860 et à 936 et que $d > 15$.
2. Calculer d.

exercice 5

Deux entiers a et b ont pour pgcd 180 et pour ppcm 6300. On pose $a' = \dfrac{a}{180}$ et $b' = \dfrac{b}{180}$.

1. Calculer $a' \times b'$.
2. En supposant $a' < b'$, déduire de la question précédente les nombres a' et b' puis a et b.

exercice 6

1. Calculer le pgcd D des nombres 254 100 et 76 050 par l'algorithme d'Euclide (on pourra vérifier la valeur de D en utilisant la décomposition de 254 100 et 76 050 en facteurs premiers).
2. Déduire de la question précédente une solution particulière de l'équation
   $254\,100x + 76\,050y = D$.
   Résoudre alors cette équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

durée : 2h *auteur : J-P Prigent* *Lycée Louis Armand Poitiers*

Texte 3

1. Quels peuvent être les restes dans la division par 3 de l'entier n?
Quels peuvent être ces restes lorsque n est premier?

2. Quel peut être le reste dans la division par 3 de l'entier n lorsque les deux conditions ci-dessous sont simultanément réalisées :

$$\begin{cases} n \text{ est premier} \\ 8n-1 \text{ est premier ?} \end{cases}$$

Démontrer alors que pour tous les entiers n au moins égaux à 5 réalisant les deux conditions précédentes, $8n+1$ est composé.

3. Démontrer que si n est premier, $8n^2+1$ est en général composé.

Dans les questions indépendantes ci-dessous
d désigne le pgcd des entiers naturels non nuls a et b ;
m désigne le ppcm de ces entiers ;
$a' = \dfrac{a}{d}$ et $b' = \dfrac{b}{d}$.

1. On cherche tous les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant le système

$$\begin{cases} a > b \\ a^2 + b^2 = 801 \\ m = 120 \end{cases}$$

   a. Montrer que d est un diviseur commun à 801 et 120. En déduire les valeurs possibles de d.

   b. Exprimer $(a+b)^2$ en fonction de m et d. Déterminer alors les couples (a, b).

2. On cherche tous les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant le système

$$\begin{cases} a < b \\ 2m + 3d = 78 \end{cases}$$

   a. Montrer que $2a'b'+3$ est un diviseur impair de 78 au moins égal à 5.

   b. Déterminer les couples (a, b).

durée : 2h *auteur : J-P Prigent* *Lycée Louis Armand Poitiers*

Texte 4

exercice 1
Pour tout entier naturel n on considère l'entier

$$u_n = 3^{3n+3} - 1$$

Démontrer que u_n est divisible par 26.
NB : Cette propriété pourra être démontrée par récurrence mais aussi autrement. Vous êtes libre du choix de la méthode de démonstration.

exercice 2
Déterminer la décomposition de 2880 en produit de facteurs premiers.
En déduire le nombre de diviseurs positifs de 2880.

exercice 3
Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

1. Déterminer la liste, par ordre croissant, des entiers naturels diviseurs de p^n.
2. Calculer en fonction de p et de n la somme de ces diviseurs.

exercice 4

1. Donner la liste, par ordre croissant, des entiers naturels diviseurs de 200.
2. Déterminer toutes les suites de nombres entiers naturels de la forme :

$$n+1, n+2, n+3, \cdots, n+m$$

dont la somme est 100.

exercice 5
La somme de deux entiers x et y est égale à 936664.
On suppose que $x > y$.
Quand on divise x par y le quotient est 381.
Calculer les couples (x, y) d'entiers qui vérifient les conditions précédentes.

exercice 6
Résoudre l'équation :

$$x + y = xy$$

sachant que x et y sont des entiers.
Afin de contrôler les résultats obtenus, construire la courbe d'équation : $x + y = xy$.

durée : 2h *auteur : J-C Renaud* *Lycée Louis Armand Poitiers*

Texte 5

exercice 1
On divise l'entier naturel n par 125.
Le quotient est un entier q strictement supérieur à 1 et le reste vaut $2q^3 - 3$.
Quelles sont les valeurs possibles de n ?

exercice 2
Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

$$\begin{cases} a\,b = 5400 \\ pgcd\,(a, b) = 15 \\ a < b \end{cases}$$

exercice 3

1. Démontrer que si les entiers naturels a et b sont premiers entre eux, il en est de même de a et de $a + b$.
2. En déduire que si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et $a\,b$ sont premiers entre eux.
3. Démontrer que la fraction $\dfrac{n}{n+1}$ est irréductible.
4. En déduire que $\dfrac{n^2+n}{2n+1}$ est irréductible.

exercice 4
Pour tout entier naturel n au moins égal à 2 on pose :

$$a = n - 1 \qquad b = n^2 - 3n + 6$$

1. Démontrer que les diviseurs de a et b sont les mêmes que ceux de a et de 4.
2. En déduire le pgcd de a et de b suivant les valeurs de n.

exercice 5
On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$324x - 245y = 7$$

1. Démontrer que pour toute solution (x, y) de l'équation, x est multiple de 7.
2. A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer une solution (x_0, y_0) de l'équation.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Soit d le pgcd des entiers x et y tels que (x, y) soit une solution de l'équation.
   Quelles sont les valeurs possibles de d?
5. Déterminer les solutions de l'équation telles que x et y soient premiers entre eux.

durée : 2h *auteur : J-C Renaud* *Lycée Louis Armand Poitiers*