

Présentation du neurone artificiel

Proposition de correction

2.3 Neurone et fonction logique

a) f est une fonction continue sur \mathbb{R} et elle est strictement croissante d'après le tableau de variation, on a $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(z) = 0,5$ admet une unique solution.

b) Résolution de l'équation $f(z) = 0,5$

$$\begin{aligned} f(z) &= 0,5 \\ \frac{1}{1+e^{-z}} &= 0,5 \\ 1+e^{-z} &= 2 \\ e^{-z} &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

c) En prenant 0,5 on est milieu de l'intervalle de variation de f , on aurait pu prendre toutes les valeurs de l'intervalle $]0;1[$ permettant une discrimination.

d)

S	Valeur de S	Valeur de Z
Si S est Vrai	$\geq 0,5$	> 0
Si S est faux	$< 0,5$	< 0

3 La fonction logique ET

a) Recopier puis compléter le tableau de la fonction logique ET ci-dessous

x_1	x_2	État logique de S=SL	Valeur de Z	Valeur de S
0	0	0	< 0	$< 0,5$
0	1	0	< 0	$< 0,5$
1	0	0	< 0	$< 0,5$
1	1	1	≥ 0	$\geq 0,5$

b)

D'après la définition on $x_1 w_1 + x_2 w_2 + b_0 w_0 = Z$, on a choisi $b_0 = -1$ donc $x_1 w_1 + x_2 w_2 - w_0 = Z$

c)

$$\begin{cases} 0 w_1 + 0 w_2 - w_0 < 0 \\ 0 w_1 + 1 w_2 - w_0 < 0 \\ 1 w_1 + 0 w_2 - w_0 < 0 \\ 1 w_1 + 1 w_2 - w_0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -w_0 < 0 \\ w_2 - w_0 < 0 \\ w_1 - w_0 < 0 \\ w_1 + w_2 - w_0 \geq 0 \end{cases}$$

d)

Une solution possible est
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 0,8 \\ w_2 = 0,8 \end{cases}$$

e) voir fichier joint

f) Un seul neurone est suffisant et nous avons vu que la solution du système proposée n'est pas unique.

2. La fonction logique OU

a)

x_1	x_2	État logique de S SL	Valeur de Z	Valeur de S
0	0	0	<0	$<0,5$
0	1	1	≥ 0	$\geq 0,5$
1	0	1	≥ 0	$\geq 0,5$
1	1	1	≥ 0	$\geq 0,5$

b)

$$\begin{cases} 0w_1 + 0w_2 - w_0 < 0 \\ 0w_1 + 1w_2 - w_0 \geq 0 \\ 1w_1 + 0w_2 - w_0 \geq 0 \\ 1w_1 + 1w_2 - w_0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -w_0 < 0 \\ w_2 - w_0 \geq 0 \\ w_1 - w_0 \geq 0 \\ w_1 + w_2 - w_0 \geq 0 \end{cases}$$

Une solution possible est $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 2 \\ w_2 = 2 \end{cases}$

c) La fonction logique non ou conduit au système suivant :

$$\begin{cases} -w_0 \geq 0 \\ w_2 - w_0 < 0 \\ w_1 - w_0 < 0 \\ w_1 + w_2 - w_0 < 0 \end{cases} \text{ une solution possible est donc } \begin{cases} w_0 = -1 \\ w_1 = -2 \\ w_2 = -2 \end{cases} . \text{ C'est l'opposé de la solution précédente.}$$

3. Implémentation en Python des fonctions logiques précédentes

Voir fichier joint

4. La fonction logique OU EXCLUSIF XOR

a) En utilisant les conventions précédentes recopier et compléter le tableau de la fonction logique XOR.

x_1	x_2	SL	Valeur de Z	Valeur de S
0	0	0	<0	$<0,5$
1	0	1	≥ 0	$\geq 0,5$
0	1	1	≥ 0	$\geq 0,5$
1	1	0	<0	$<0,5$

b)

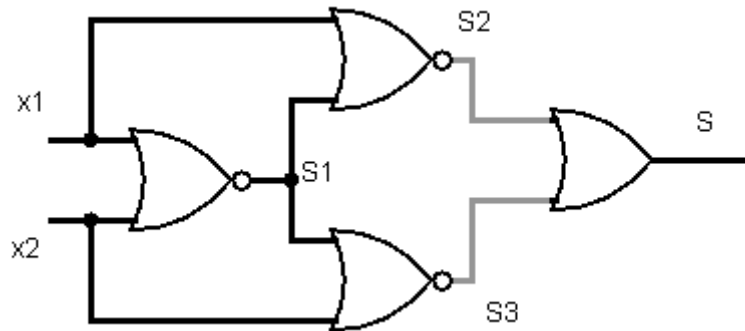
$$\begin{cases} 0w_1 + 0w_2 - w_0 < 0 \\ 0w_1 + 1w_2 - w_0 \geq 0 \\ 1w_1 + 0w_2 - w_0 \geq 0 \\ 1w_1 + 1w_2 - w_0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -w_0 < 0 \\ w_2 - w_0 \geq 0 \\ w_1 - w_0 \geq 0 \\ w_1 + w_2 - w_0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 > 0 \\ w_2 \geq w_0 \\ w_1 \geq w_0 \\ w_1 + w_2 < w_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_0 > 0 \\ w_2 \geq w_0 \\ w_1 \geq w_0 \\ w_1 + w_2 < w_0 \end{cases} \quad \text{en additionnant les inéquations 2 et 3 on obtient} \quad \begin{cases} w_0 > 0 \\ w_1 + w_2 \geq 2w_0 \\ w_1 + w_2 < w_0 \end{cases} . \text{ On déduit des}$$

deux dernières inéquations que le système n'a pas de solution.

c) Il n'est pas possible d'implémenter un ou exclusif avec un unique neurone.

d) On peut utiliser l'implémentation suivante :



Cela revient à utiliser 4 neurones et 3 couches.

Voir le fichier joint pour l'implémentation en python.