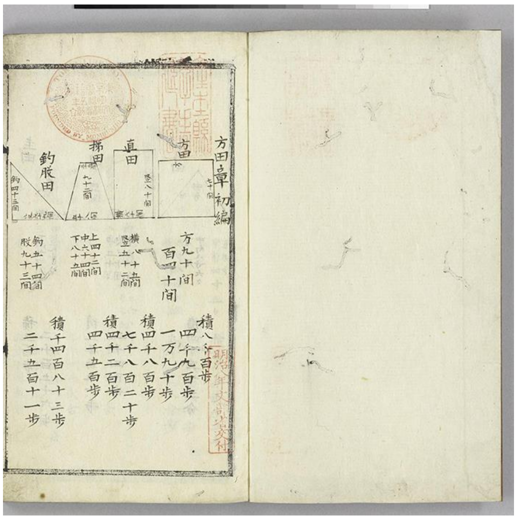
Les barres d’or et d’argent

« Supposons que nous ayons 9 barres d'or et 11 barres d'argent. La totalité des barres d'or pèse autant que la totalité des barres d'argent. Si nous prenons une barre d'or et la remplaçons par une barre d'argent, le poids total des barres d'or diminue de 13 *liang*. Détermine combien pèsent une barre d'or et une barre d'argent individuellement. » (Inspiré du problème chinois suivant : *Les Neuf Chapitres sur l’art mathématique*, problème 7.17)



Cycles : Lycée **Classes** : 2^{nd}

Matériel nécessaire :

Domaine (en référence aux programmes) : Grandeur et Mesures ; Géométrie - Représenter et caractériser les droites du plan ; Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d’intersection de deux droites sécantes.

1 - Mots-clés

Fractions, Proportions, Calcul littéral, Problème historique

2 - Objectifs et notions ciblées

Travailler la résolution d'un système d'équations à deux inconnues en lien avec la modélisation mathématique.

3 – Prérequis

Résolution d'un système d'équations à deux inconnues.

4A - Stratégies de résolution attendues

L’élève traduit l’énoncé par un système d’équations.

Il commence par nommer les inconnues, par exemple *o* le masse d’une barre d’or et *a* la masse d’une barre d’argent. On sait que :

$$9o = 11a$$

De plus, on sait que :

$$8o + a = 9o - 13$$

Simplifiée : $a = o - 13$

On se retrouve avec deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 9o = 11a \\ a = o - 13 \end{cases}$$

Une fois le système entièrement trouvé, l’élève le résout par substitution.

4B - Stratégies de résolution observées / Difficultés et erreurs des élèves

Une première difficulté peut venir de la nouveauté ou du caractère inhabituel de l’utilisation du “liang” comme unité de mesure de la masse. On peut ainsi préciser ce point (en donnant l’équivalence liang/kg) et éventuellement formuler de manière analogue en utilisant le kg.

Une autre difficulté peut résider dans la difficulté à comprendre l'homogénéité dans les équations manipulées, en particulier dans le fait que les équations modélisent des masses -

exprimées en liang et non des nombres de barres. En effet, dans le terme de droite de la seconde équation ($9o - 13$), certains élèves peuvent “lire” intuitivement “*9 barres en or moins 13”* et non “*la masse de 9 barres- 13 (en Liang)*”. Cette manière erronée de lire ou comprendre le membre de droite peut les troubler quant à l'homogénéité de l’équation, et ce que représenterait alors « 9 barres moins 13 liang ». Pour éviter cela, on peut rappeler oralement le terme masse quand on manipule les équations.

Ainsi, on peut s’attendre à ce que les élèves rencontrent des difficultés à modéliser le problème, en particulier à traduire mathématiquement le fait qu'en échangeant une barre d'or avec une barre d'argent, la masse totale des barres d’or diminue de 13 liang. Les élèves doivent comprendre que *retirer* une barre de l’ensemble des barres d’or et *ajouter* une barre d'argent à cet ensemble *réduit la masse totale initiale des barres d’or* de 13 liang.

5A - Mise en œuvre de la séance

- De manière optionnelle, la séance pourrait commencer par une introduction sur le contexte du problème (l'or, l'argent, le liang comme unité de mesure, les mathématiques chinoises sur la période des *Neuf Chapitres*). On trouvera des éléments de contextualisation dans les deux dernières références ci-dessous.
- Il pourrait être bon de commencer par essayer de proposer une phase collective de modélisation du problème en demandant aux élèves de proposer des idées. On pourrait laisser les élèves résoudre individuellement par après, puis organiser une discussion sur les différentes stratégies que les élèves ont utilisées.
- Une fois le système résolu, il est important de bien interpréter dans le contexte du problème les solutions trouvées suite à la résolution du système.

5B- Moyens pour aider les élèves

- On peut poser des questions pour amorcer la réflexion comme “Qu’est-ce qui est le plus lourd ? Une barre d’or ou une barre d’argent ? Pourquoi ?”
- On peut produire une représentation visuelle du problème et expliquer visuellement ce qui se passe lorsqu’on échange les barres. Même si le terme peut prêter à confusion dans le contexte spécifique de ce problème, la représentation des membres de l’équation à l’aide d’un diagramme en barre peut être intéressante pour les élèves rencontrant des difficultés de compréhension (voir pages 94 à 96 du guide La résolution de problème au collège publié sur éduscol, voir références).
- Si besoin, faire une révision des concepts clés pour résoudre le problème, tels que les équations linéaires et les systèmes d'équations.
- Après avoir laissé les élèves travailler individuellement ou en groupe, on peut guider les élèves à travers chaque étape de la résolution du problème.

5C -Pistes de Différenciation/Trace écrite : Institutionnalisation *(qu’est-ce la classe doit retenir ?)*

Afin de proposer une progressivité relativement aux difficultés possiblement rencontrées dans ce problème, il peut être intéressant de proposer en amont des problèmes mobilisant des nombres sans unité (calcul de nombres de personnes, de places, etc) ou portant sur des grandeurs plus accessibles pour les élèves (comme les prix) et dont ils ont une meilleure représentation intuitive afin de faciliter la phase de modélisation.

6 - Prolongements possibles

- La fiche *La Lance Partiellement Immergée (problème médiéval)* (https://www.problematheque-csen.fr/fiche-probleme/la-lance-partiellement-immergee-probleme-medieval/)
- la fiche *La pierre qui grossit (problème babylonien)* (https://www.problematheque-csen.fr/fiche-probleme/la-pierre-qui-grossit-probleme-babylonien/)

7 - Références

- Guide “La Résolution de Problèmes mathématiques au collège”, accessible via le lien suivant : https://eduscol.education.fr/document/13132/download?attachment
- Çetin, H., & Ertekin, E. (2011). The Relationship between Eighth Grade Primary School Students' Proportional Reasoning Skills and Success in Solving Equations. *International Journal of Instruction, 4*, 47-62.
- https://www.maa.org/book/export/html/1438374 : source de l’illustration, qui montre la première page du *Sankei kyusho*, un livre dont l'auteur et la date sont inconnus et qui est organisé comme le classique mathématique chinois *Jiuzhang suanshu* (*Les neuf chapitres sur l'art mathématique*), par lequel il a manifestement été influencé et dont est tiré le problème. Il offre 246 problèmes axés sur des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens dans divers domaines tels que l'ingénierie, l'arpentage, le commerce et la fiscalité, et a joué un rôle fondamental dans le développement des mathématiques en Chine, tout en explorant également les différentes compréhensions du concept de "preuve" et les méthodes de résolution de problèmes. Voir référence ci-dessous pour plus de détails.
- O'Connor, J.J. et Robertson, E. F., Nine chapters - MacTutor History of Mathematics, 2003, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters/ (décrit *Les neuf chapitres sur l’art mathématique*).

Ce problème est tiré de l’entrée “Fraction (mathématiques)” dans Wikipédia, l'encyclopédie libre*, page accessible via le lien suivant :* *http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fraction_(math%C3%A9matiques)&oldid=208230422.*

Cette fiche a été rédigée par Romain Bourdoncle.