Des carrés dans un carré

Fabien AUDET, Péma KOWALSKI, Evan OLIVIER

Paul Guerin | Niort
Cité scolaire

Présentation du problème

Nous nous sommes intéressé.e.s
à des tablettes de chocolat
de forme carrée,
...
mais dont les petits carrés qui les
composent n'ont pas forcément
la même taille.

Présentation du problème

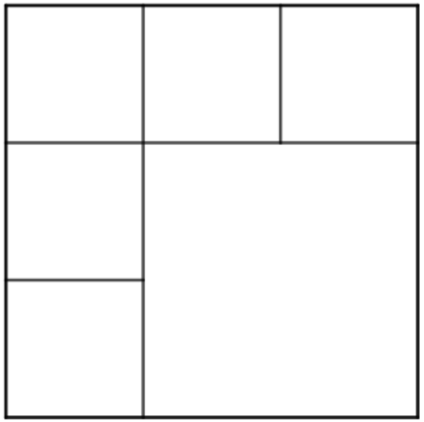
Problématique

Peut-on créer des tablettes carrées qui sont composées de n’importe quel nombre de « petits carrés » (pas forcément de même taille) ?

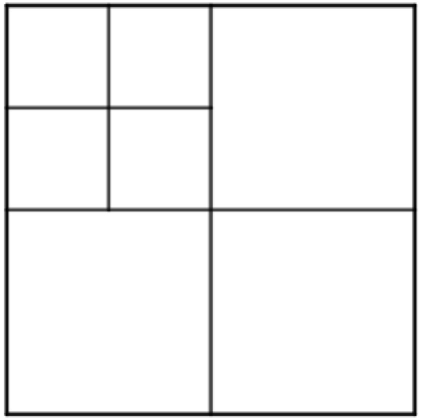
Quelques exemples

Voici, par exemple, de telles tablettes pour :

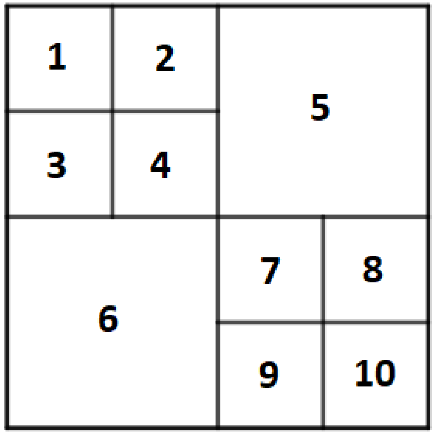
$n = 6$ carrés



$n = 7$ carrés



$n = 10$ carrés



Les cas $n = 2$ et $n = 3$

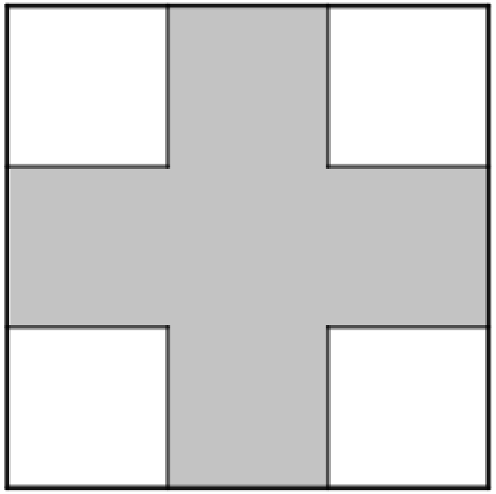
Remarque : Il n’est pas possible d’avoir une tablette carrée composée de $n = 2$ ou de $n = 3$ carrés.

En effet, au moins l’un de ces carrés devra être en contact avec deux des coins de la tablette.

Le cas $n = 5$

<u>Remarque :</u> Il n’est pas possible d’avoir une tablette carrée composée de $n = 5$ carrés.

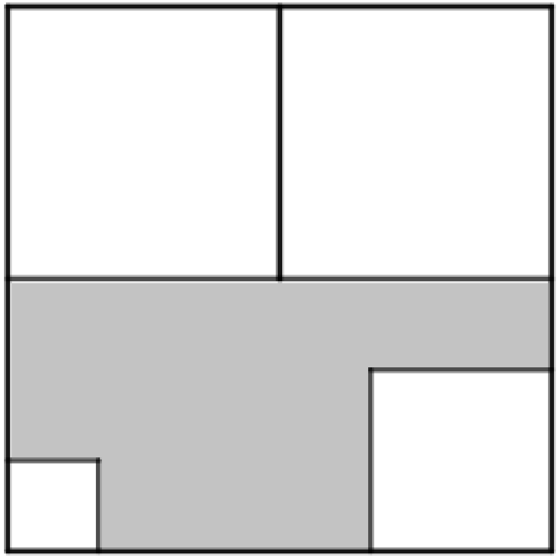
4 de ces carrés seraient forcément à chacun des coins de la tablette.

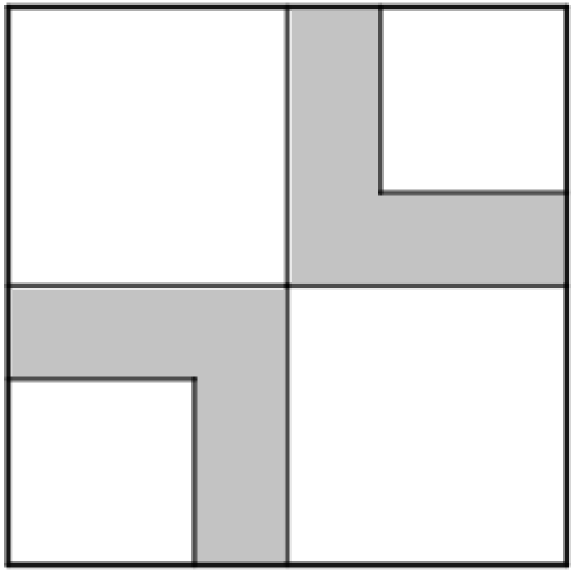


Puis il y a 3 cas.

Le cas *n* = 5

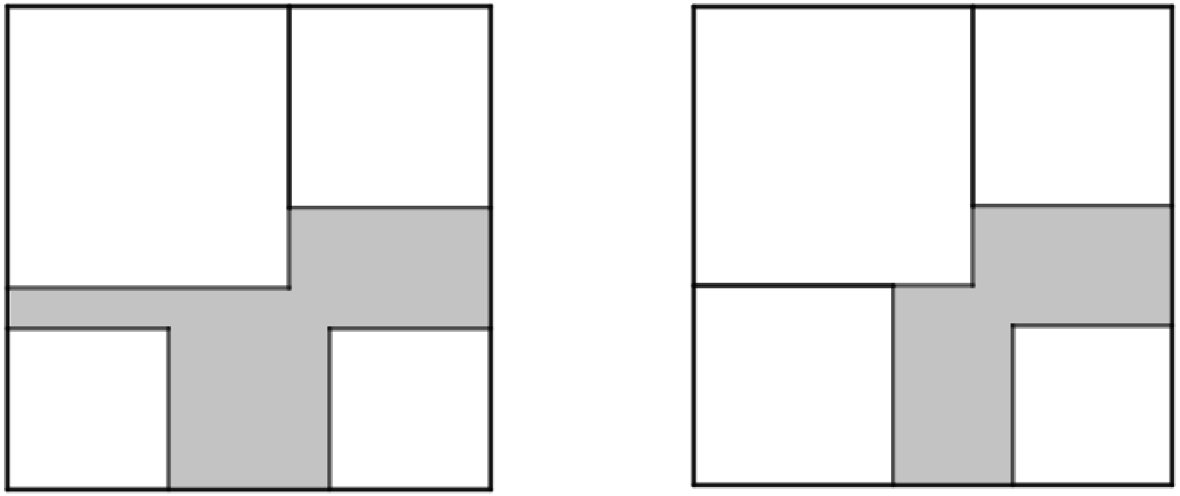
<u>cas 1 :</u> Au moins deux carrés ont leur sommet intérieur en commun





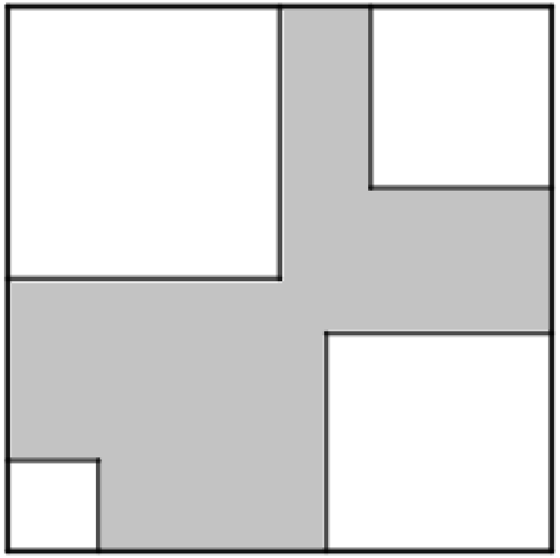
Le cas $n = 5$

cas 2 : Au moins deux de ces 4 carrés ont un bord en commun (mais pas leur sommet intérieur).



Le cas n = 5

<u>cas 3 :</u> Aucun de ces carrés n'ont de bords en commun.



Le cas $n = 5$

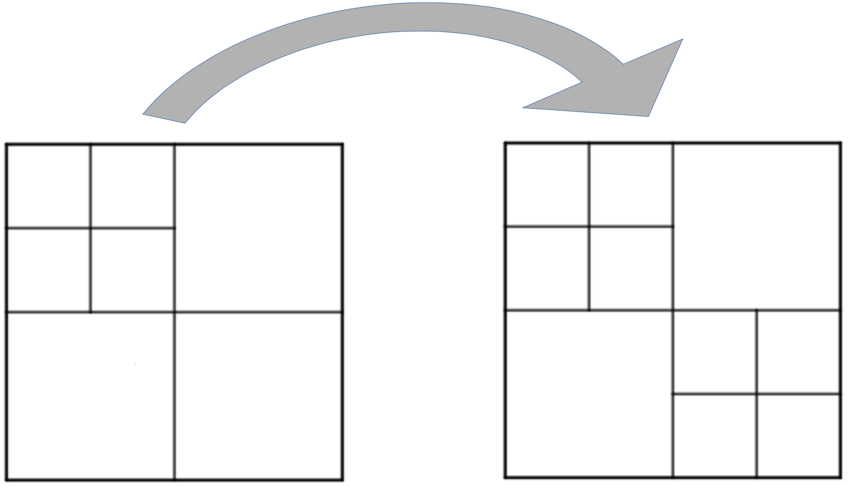
Donc il n'existe pas de tablette carrée composée de $n = 5$ carrés.

Le premier résultat

Proposition :
Pour tout entier positif n différent de 2, 3 ou 5,
il existe un découpage d'une tablette carrée en n carrés.

Démonstration

On remarque que si l'on a déjà un découpage d'une tablette carrée en n carrés, alors on peut obtenir un découpage en n+3 carrés en coupant un carré de taille au moins 4 en deux.

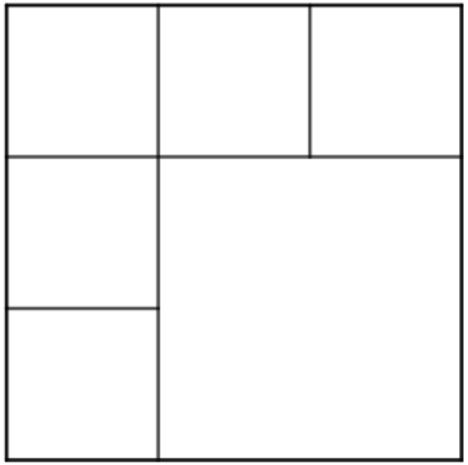


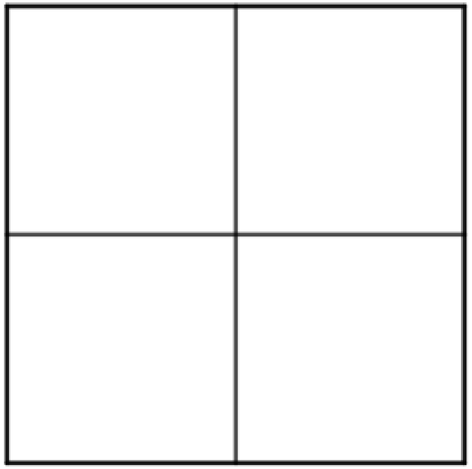
Démonstration

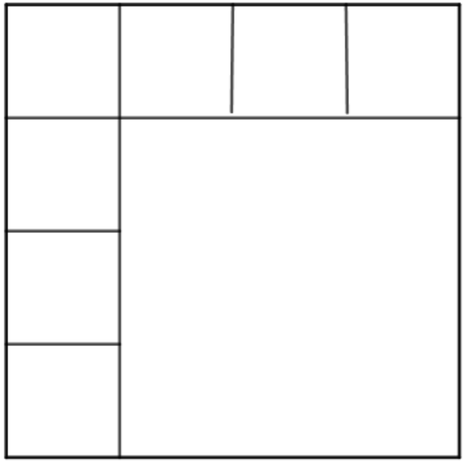
Finalement, nous pouvons avoir un découpage en :

- 6 carrés (pour les découpages en 6-9-12-15-18-...)
- 4 carrés (pour les découpages en 4-7-10-13-16-19-…)
- 8 carrés (pour les découpages en 8-11-14-17-20-…)

(le cas $n = 5$ étant exclu)



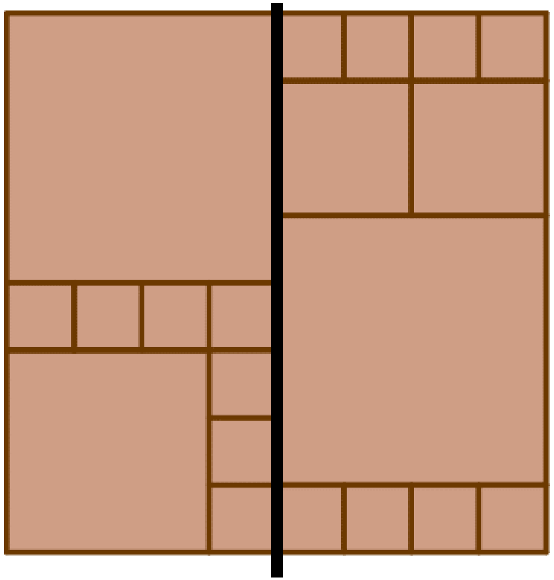




La suite !

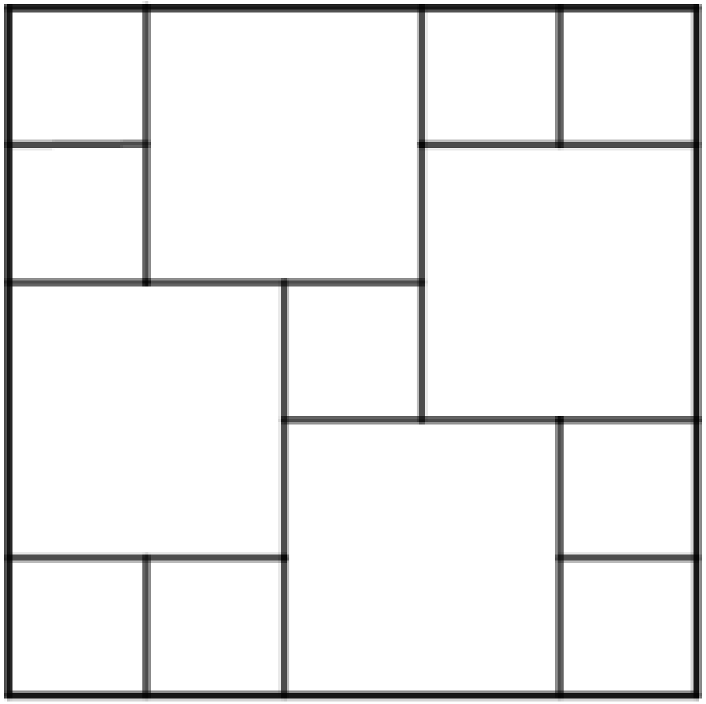
Ce premier résultat établi,
nous nous intéressons aux « découpages *insécables* ».

Il s’agit de découpages qui n’ont
<u>aucune</u> ligne qui traverse entièrement
la tablette horizontalement ou
verticalement.



La suite !

Après plusieurs essais, nous avons trouvé ce découpage insécable, obtenu dans une tablette dont le côté est de longueur 5.



Et nous en avons aussi obtenu dans des tablettes plus grandes.

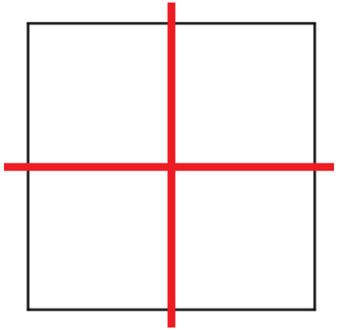
La suite !

Nouvelle problématique

Existe t-il des découpages insécables pour des tablettes carrées de taille 2, 3, ou 4 ?

La taille 2

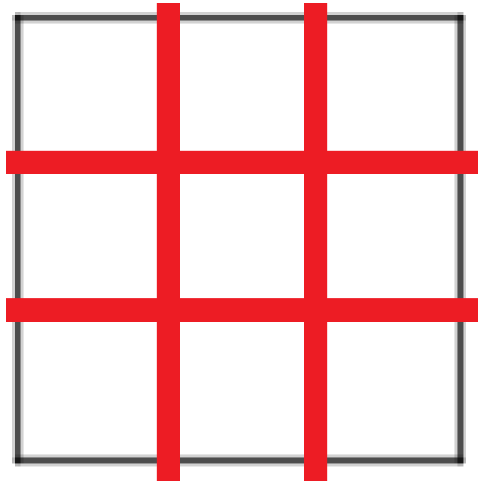
Si la tablette carrée est de taille 2, alors on n'autorise que des carrés de taille 1.

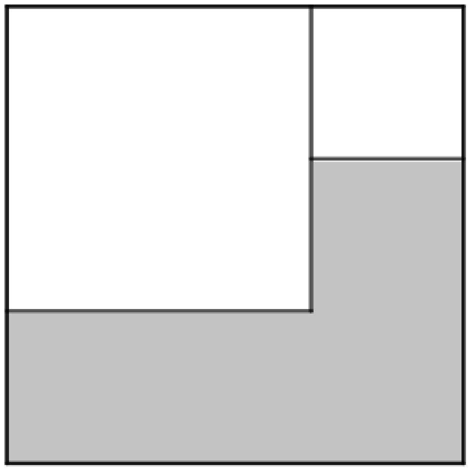


Et il est évident que la tablette n'admet aucun découpage insécable.
(Elle est *sécable*.)

La taille 3

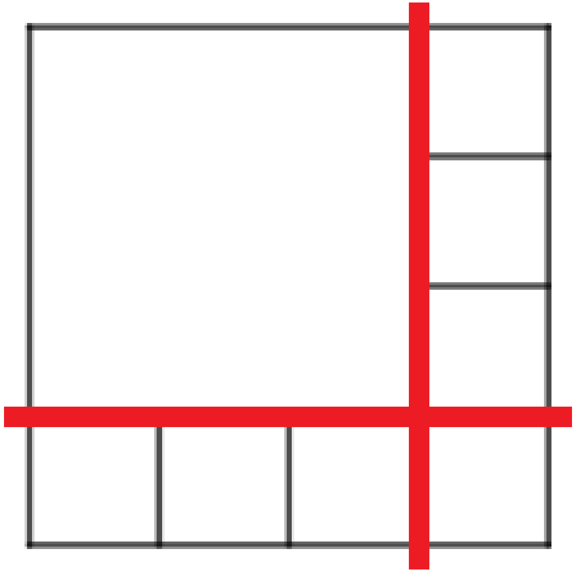
Si la tablette carrée est de taille 3, alors elle n’aurait que des carrés de taille 1 ou 2.
La tablette est forcément sécable.





La taille 4

Si la tablette carrée est de taille 4,
elle ne peut pas être insécable, et
avoir de carrés de taille 3.

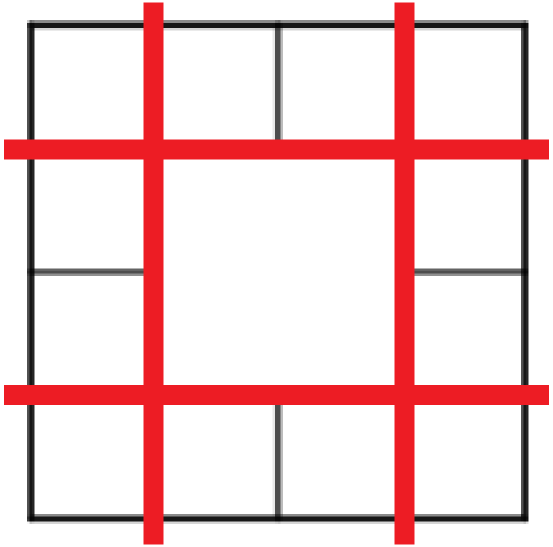


Une tablette insécable de taille 4 ne peut contenir que
des carrés de taille 1 et de taille 2.

La taille 4

On se demande alors où placer un premier carré de taille 2. Il y a trois cas:

<u>cas 1 :</u> Le carré de taille 2 est au centre



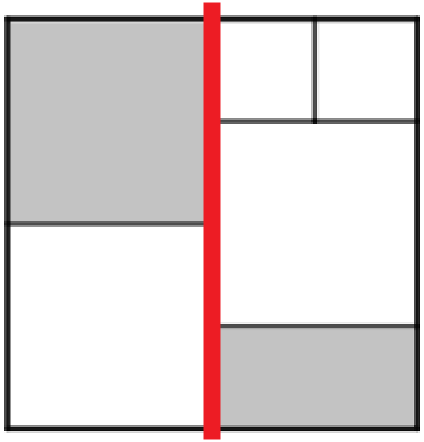
Dans ce cas, on a forcément le découpage ci-contre, qui est sécable.

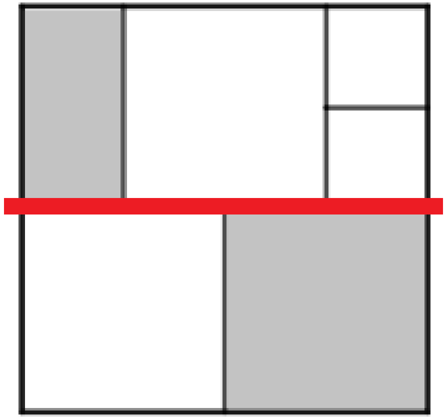
La taille 4

cas 2 : Le carré de taille 2 est dans un coin

Dans ce cas, le coin opposé a un carré de taille 1, pour espérer avoir un découpage insécable.

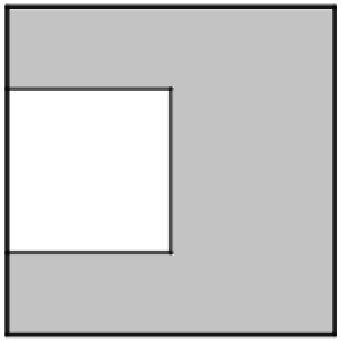
Et nous arrivons à l'un de ces deux cas, qui sont des découpages sécables.



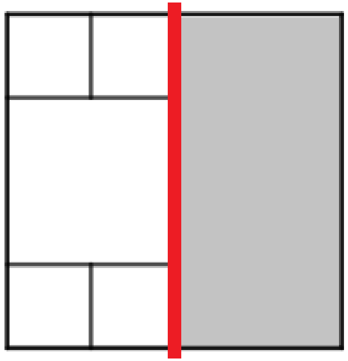


La taille 4

<u>cas 3 :</u> Le carré de taille 2 est sur un bord mais pas un coin



Dans ce cas, nous avons deux « couloirs » qui ne peuvent être complétés que par des carrés de taille 1, amenant un découpage sécable.



Bilan

Il n’existe pas de découpage insécable pour une tablette carrée de taille 2, 3, ou 4.

Nous avons trouvé un découpage insécable pour une tablette carrée de taille 5 (et plus).

Mais encore ...

Mais, qu'en est-il pour les tablettes rectangulaires... Lesquelles admettent un découpage insécable ?

Nous nous sommes demandé quelle est la plus petite taille (*pour limiter le sucre*) de tablette rectangulaire qui admet un découpage insécable (*pour avoir une tablette de chocolat amusante à regarder*).

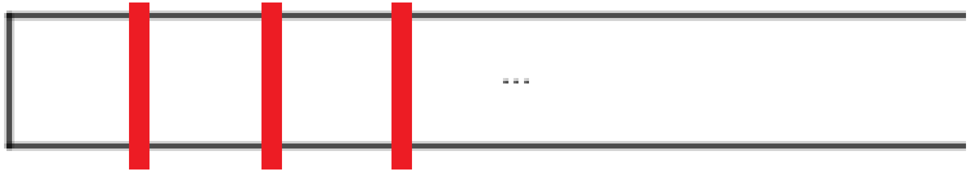
Les rectangles...

Nous avons commencé par regarder quels sont les « plus petites » tablettes rectangulaires insécables.

Et pour cela, nous avons observé différentes largeurs possibles pour la tablette.

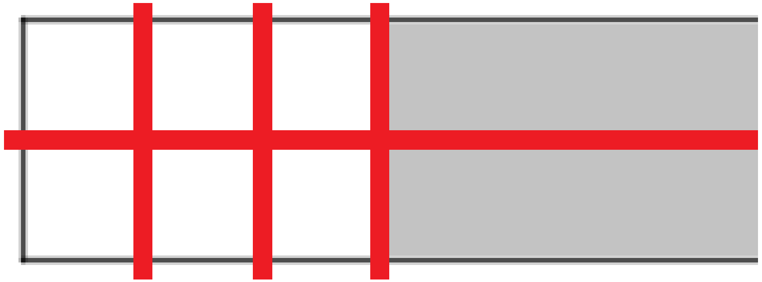
Cas où la largeur vaut 1

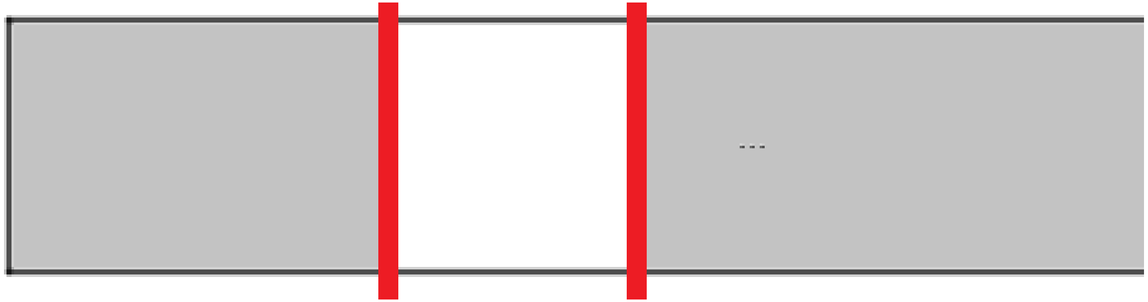
Dans le cas où la tablette rectangulaire a une largeur égale à 1, elle ne peut pas être insécable.



Cas où la largeur vaut 2

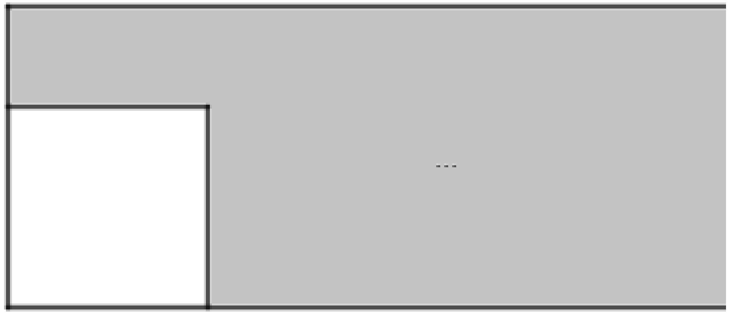
Toute tablette rectangulaire ayant une largeur égale à 2, n’admet pas non plus de découpage insécable.
(Soit elle n’a que des carrés de taille 1, soit elle a un carré de taille 2.)





Cas où la largeur vaut 3

Dans le cas où la tablette rectangulaire a une largeur égale à 3 :
La partie la plus à gauche ne peut pas avoir un carré de taille 3 ou que des carrés de taille 1. Donc elle a un carré de taille 2, et le « couloir » ne peut être complété que par des carrés de taille 1, la rendant sécable.



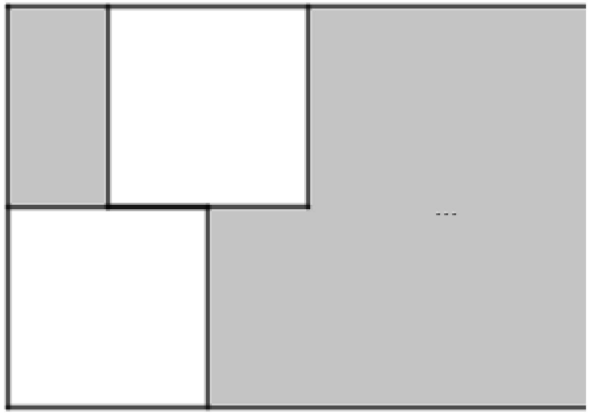
Cas où la largeur vaut 4

Dans le cas où la tablette rectangulaire a une largeur égale à 4, nous éliminons la possibilité de commencer à gauche par des carrés de taille 1, 3 ou 4.
(pour les mêmes raisons dans le cas de la largeur 3.)

Nous débutons donc avec un carré de taille 2.

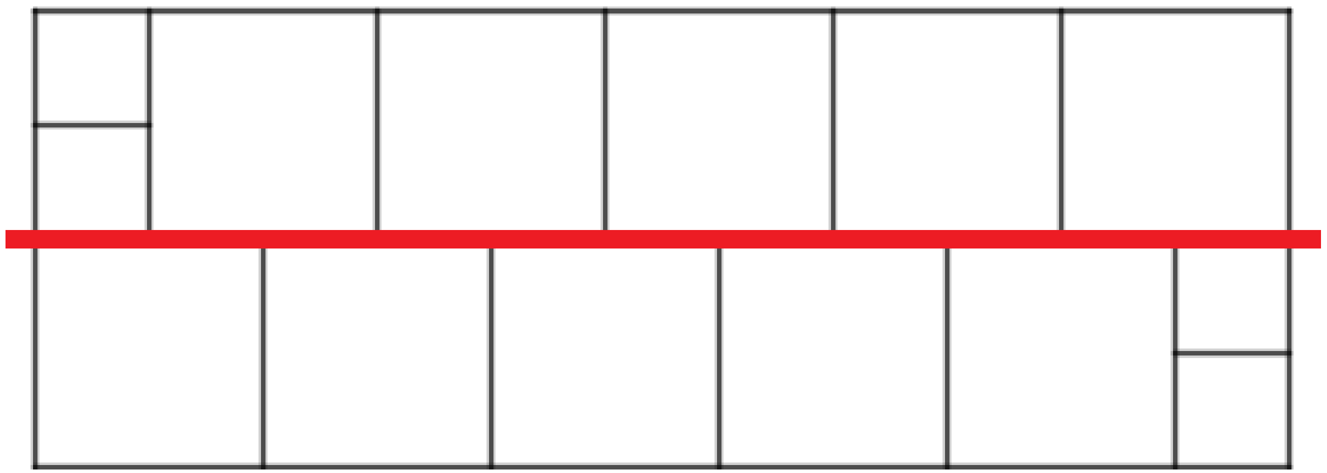
Cas où la largeur vaut 4

Afin d'aller vers une tablette insécable, nous ne pouvons que poursuivre avec un carré de taille 2 en « décalé ».



Cas où la largeur vaut 4

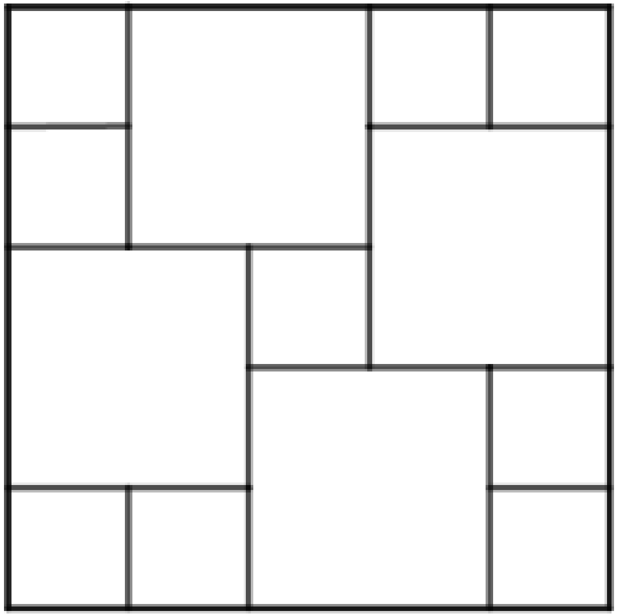
Mais comme nous sommes obligés de poursuivre cette logique sur toute la longueur, nous arrivons à une tablette sécable (horizontalement).



Conclusion

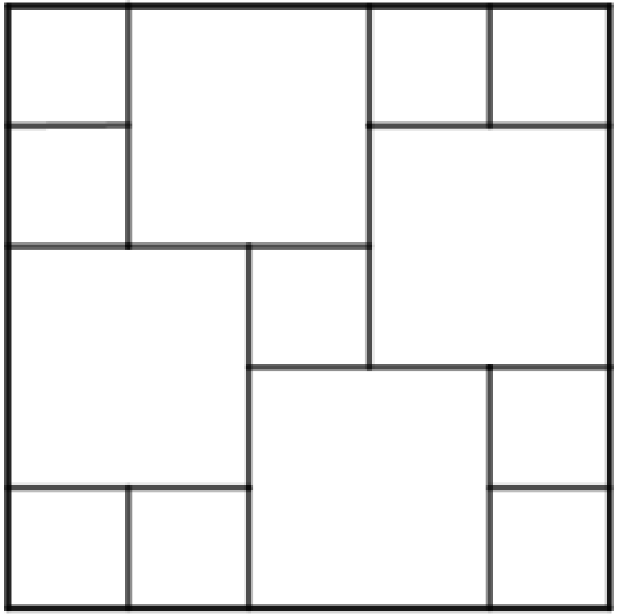
En conclusion, la « plus petite » tablette insécable a une largeur de 5.

Et nous connaissons déjà une tablette carrée insécable de taille 5, qui est donc la plus petite tablette « rectangulaire » insécable.



Le mot de la fin

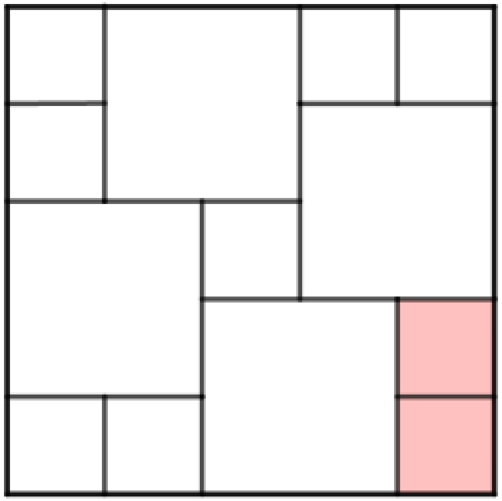
Pour conclure, nous allons présenter un moyen de construire une tablette rectangulaire insécable, à partir du moment où sa largeur et la longueur sont supérieures ou égales à 5.

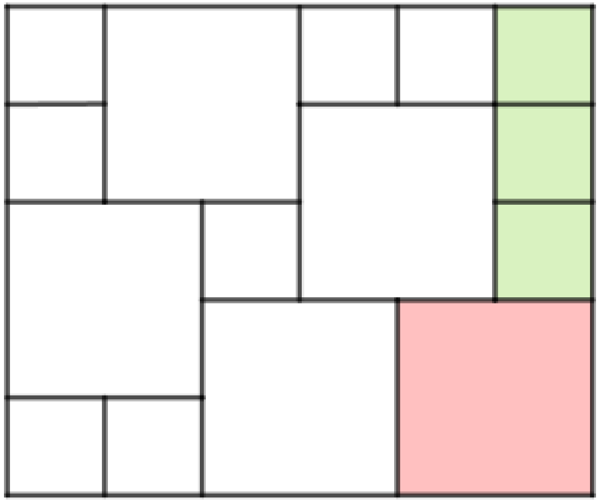


Pour cela, nous partons de notre tablette carrée de taille 5 insécable.

Le mot de la fin

Pour arriver à une tablette insécable 6x5, nous partons d'un coin d'où partent 2 carrés de taille 1, que nous complétons en un carré de taille 2, et le reste de la ligne est complétée avec des carrés de taille 1.

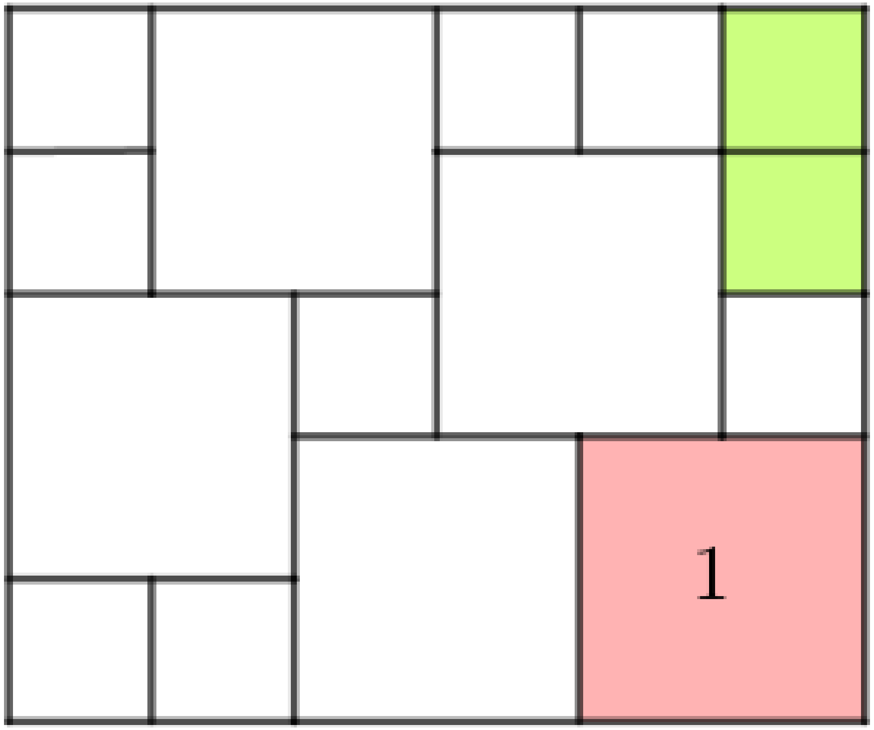




Le mot de la fin

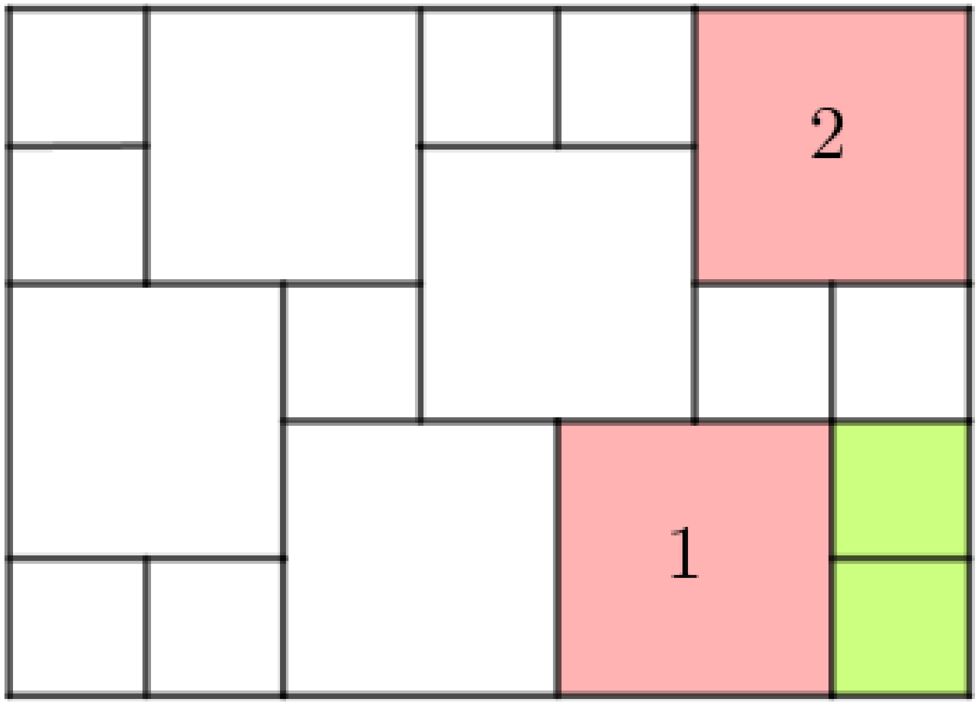
Et ce processus peut se poursuivre pour construire une tablette rectangulaire insécable de largeur et longueur quelconques.

Exemple : Obtenir un rectangle insécable 8x7.



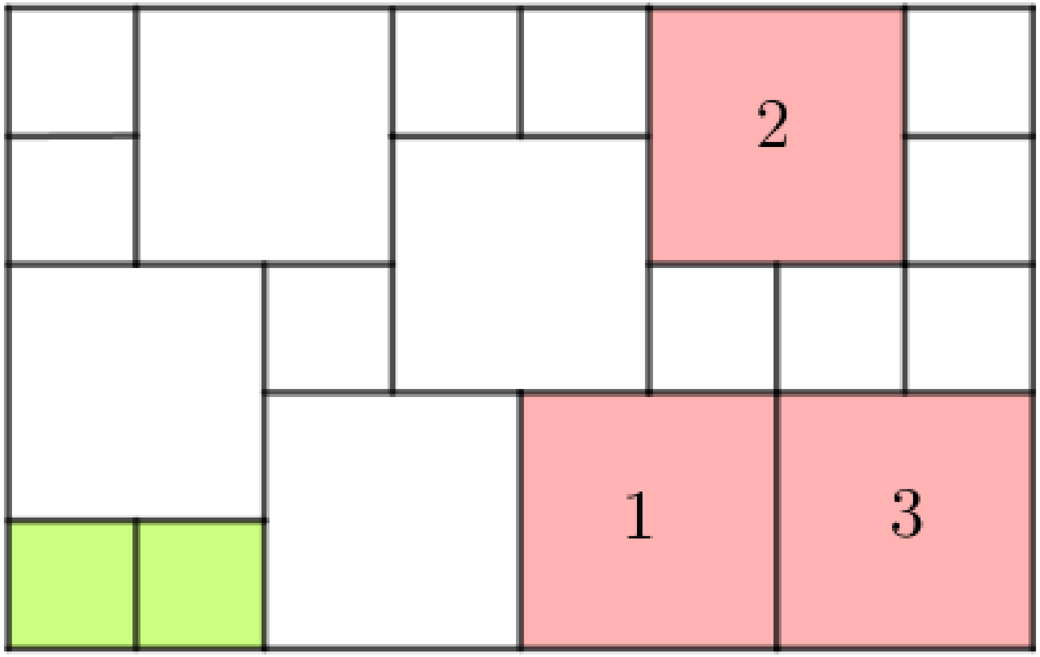
Le mot de la fin

On rajoute une autre colonne à droite.



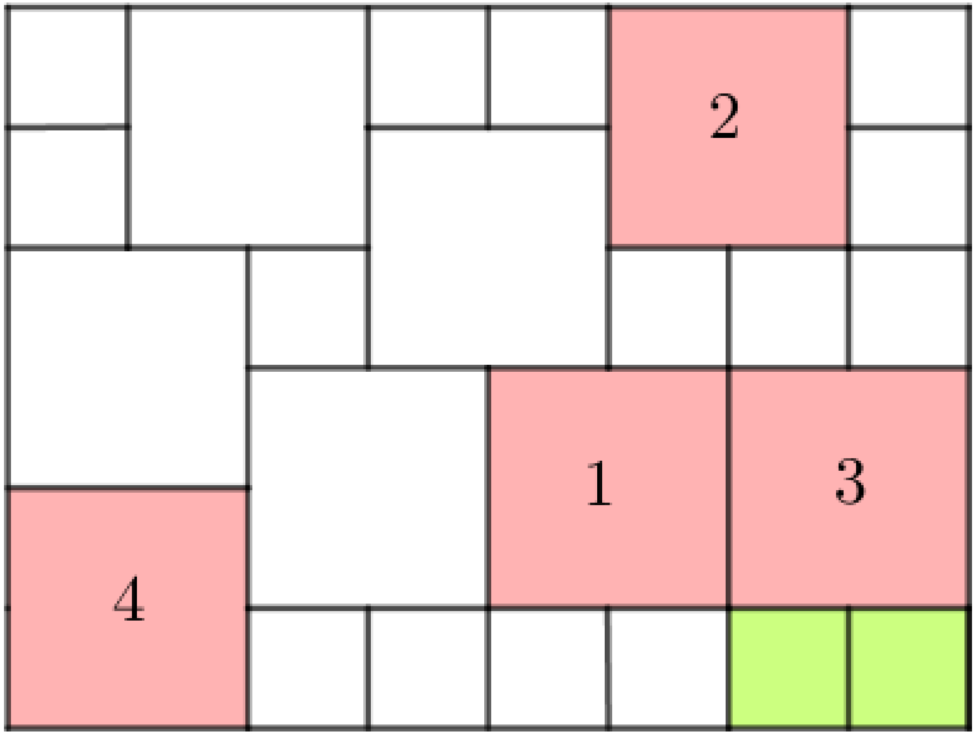
Le mot de la fin

On rajoute une dernière colonne à droite pour arriver à une longueur 8.



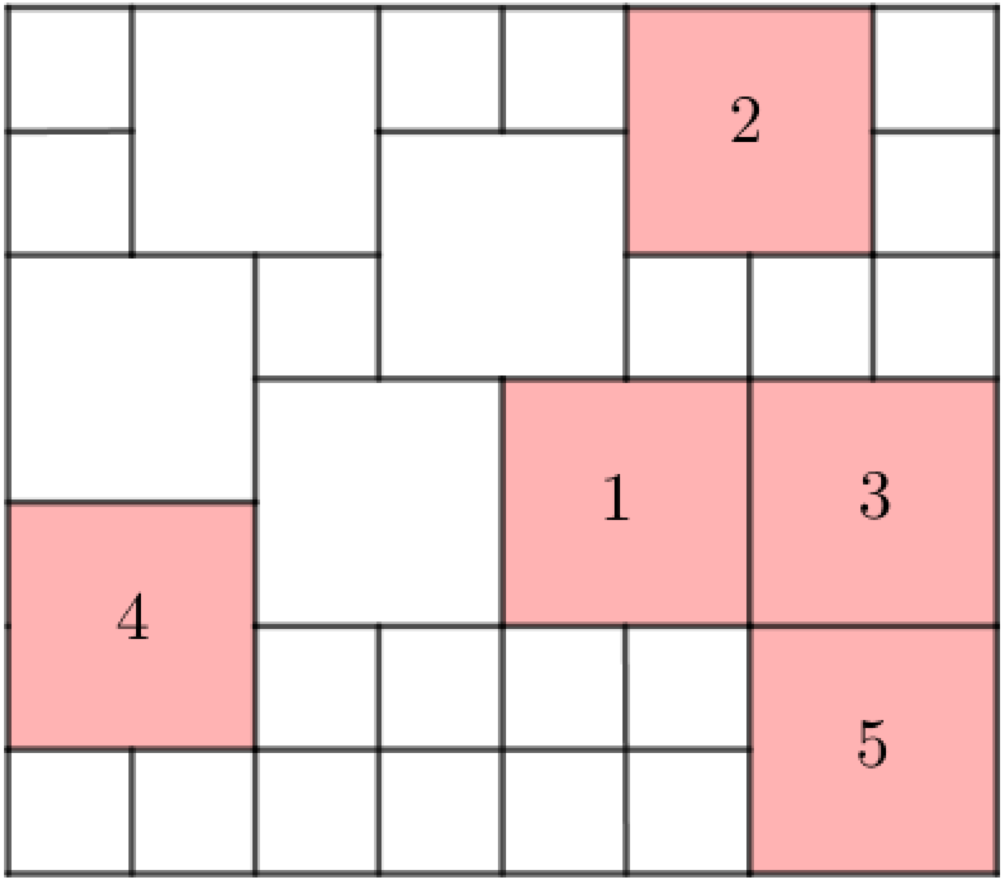
Le mot de la fin

Puis on rajoute une ligne.



Le mot de la fin

Et une dernière ligne pour arriver à un rectangle insécable 8x7.



Merci pour votre attention !