

## OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

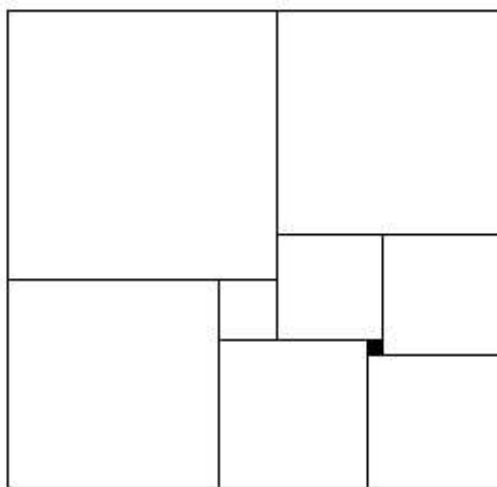
## SUJET N° 2

Durée : 4 heures

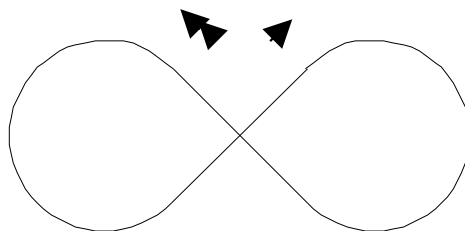
*L'emploi de la calculatrice est autorisé.  
Les quatre exercices sont indépendants.*

**Exercice n°1****Un pavage**

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.  
Quelles sont les dimensions du rectangle ?

**Exercice n°2****Le lièvre et la tortue**

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre). Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne.

Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

## Exercice n°3

### Olympiades

1°) Combien y a-t-il de façons différentes de lire le mot « JEU » en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales ? Et le mot « MATH » ?

J	E	U
	J	E
		J

M	A	T	H
	M	A	T
		M	A
			M

2°) a) Le nombre de façons différentes de lire le mot « OLYMPIADES » en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales dans le premier tableau ci-dessous à gauche est supérieur à 500. Quel est-il exactement ?

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M	P	I	A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

b)

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M			A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

Maintenant il y a une tache noire infranchissable sur les lettres PI à la troisième ligne (deuxième tableau, à droite). Quel est le nombre de façons de lire OLYMPIADES ?

3°) On revient à la grille OLYMPIADES de départ sans tache, où l'on envisage de disposer une tache ayant la forme d'un bloc vertical de trois lettres. Où faut-il mettre cette tache si l'on veut que le nombre de façons de lire OLYMPIADES soit :

- le plus grand possible ?
- le plus petit possible (le S ne fait pas partie du bloc de trois lettres verticales) ?

## Exercice n°4

### Grilles

On considère deux grilles carrées ayant chacune  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

On remplit la première grille en remplissant « en ligne » par les nombres de 1 à  $p$  puis en recommençant de 1 à  $p$  jusqu'à ce que toute la grille soit remplie (Quand on arrive à la fin d'une ligne on continue sur la ligne suivante).

On remplit la deuxième grille suivant le même processus mais en procédant « en colonne ».

Par exemple si  $n=5$  et  $p=3$  la première grille (à gauche) et la seconde grille (à droite) sont

1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1

1	3	2	1	3
2	1	3	2	1
3	2	1	3	2
1	3	2	1	3
2	1	3	2	1

On s'intéresse au nombre  $N$  de cases de ces deux grilles ayant le même nombre dans chacune des deux grilles.

(Dans l'exemple ci-dessus toutes ces cases contiennent des 1 et  $N=9$ ).

Pour les trois questions qui suivent, donner seulement la réponse. En particulier, aucune grille ne sera dessinée pour ces 3 questions.

1. Quelle est la valeur de  $N$  lorsque  $p=2$  et  $n$  vaut successivement 2, 3, 4 et 5 ?
2. Quelle est la valeur de  $N$  lorsque  $p=3$  et  $n$  vaut successivement 6 et 7 ?
3. Quelle est la valeur de  $N$  lorsque  $p=4$  et  $n=7$  ?

Pour la quatrième question, donner la réponse et la justifier si possible.

4. Quelle est la valeur de  $N$  lorsque  $p=2$  et  $n$  quelconque ?