Un peu de trigonométrie. (Sujet n° 12)

Énoncé :

Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{20}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Solution :

• En quatre lignes :

On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{20}\right) = 2\times\cos\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{9\pi}{20}}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{20}-\dfrac{9\pi}{20}}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{8}\left(\sqrt{5}+3\right)}$

D'où $\cos\left(\dfrac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{20}\right) = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\dfrac{1}{8}\left(\sqrt{5}+3\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}+3\right)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$

■

• Si on veut développer un peu plus :

La première ligne est une utilisation de la formule : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

La deuxième ligne est un résultat bien connu que l'on peut retrouver à l'aide de la diagonale d'un carré de côté 1 : $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\text{longueur du côté}}{\text{longueur de la diagonale}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La troisième ligne est un peu plus compliquée : Il existe plusieurs façons de calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

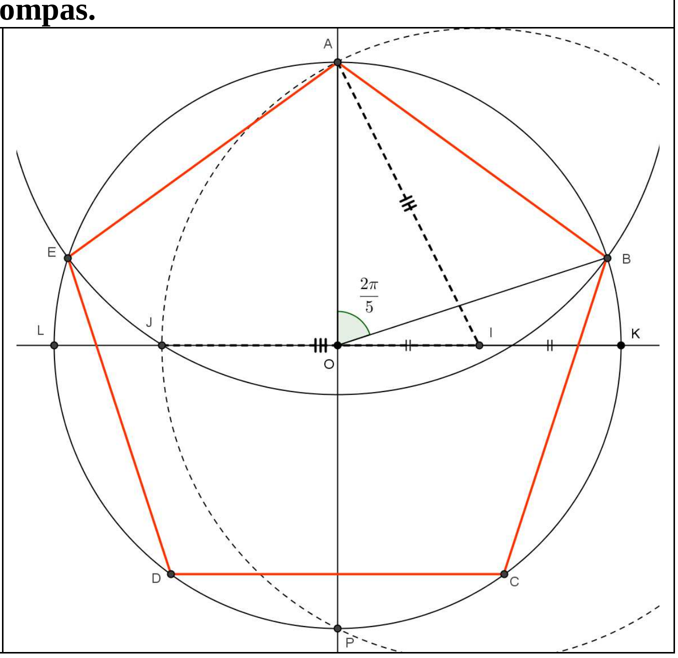
J'utilise la méthode utilisant un pentagone régulier :

Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O de rayon 1 ainsi que deux diamètres [LK] et [AP] perpendiculaires.

Le point I est le milieu de [OK].
Le cercle de centre I et de rayon IA coupe [OL] en J.
Le cercle de centre A et de rayon AJ coupe $\mathcal{C}$ en B et E.

Le cercle de centre B et de rayon AB coupe $\mathcal{C}$ en C.
Le cercle de centre C et de rayon AB coupe $\mathcal{C}$ en D.
Le polygone ABCDE est un pentagone régulier.



Calcul de cos $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

- Dans le triangle OIA, on a OI = $\frac{1}{2}$ et $AI^2 = OA^2 + OI^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ donc AI = $\frac{\sqrt{5}}{2}$. On a alors puisque AI = IJ, IJ = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et OJ = IJ – OI. OJ = $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$

- Dans le triangle OJA, on a $AJ^2 = AO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}$.

Donc AJ = $\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$. On en déduit que la longueur des cotés du pentagone ABCDE est $\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$.

- D'après la formule d'Al-Kashi, on a $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO\times OB\times\cos(\widehat{BOA})$. Ce qui donne

$\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} = 1^2 + 1^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ donc $\mathbf{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Calcul de cos $\left(\frac{\pi}{5}\right)$

D'après la relation $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, on a $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$.

Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+3}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$. D'où $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{8}\left(\sqrt{5}+3\right)}$.

Olivier Rochoir