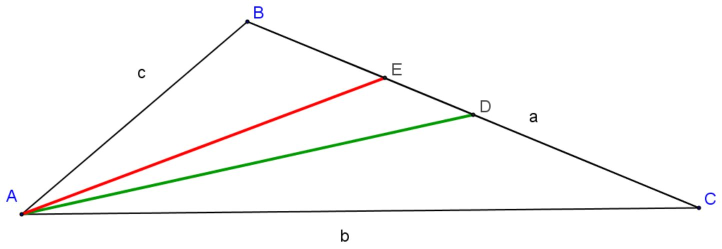
Un couple improbable : médiane et bissectrice ! (Sujet n° 1)

Énoncé :

Soit ABC un triangle quelconque. Les droites (AE) et (AD) représentent respectivement la bissectrice et la médiane du triangle ABC issues du point A.

Montrer que : $0 \leqslant AD^2 - AE^2 \leqslant \dfrac{(b-c)^2}{2}$



Solution :

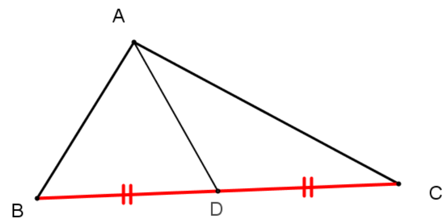
Il est clair que l'on va avoir besoin de résultats sur les médianes et les bissectrices.
Établissons alors quelques résultats préliminaires.

☞ **Calcul de la longueur de la médiane AD**

On a, en utilisant le produit scalaire :

$AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2$

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} + DB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + DC^2$
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) + DB^2 + DC^2$

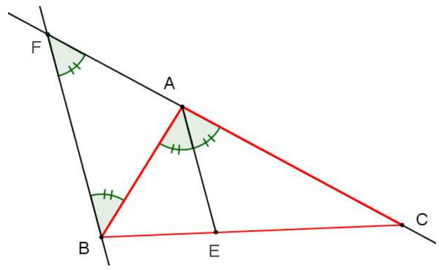


Puisque D est le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ et $DB = DC = \dfrac{1}{2}BC$

Donc $\boxed{\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2}}$ **Formule ①**

☞ **Calcul de la longueur de la bissectrice AE**

• Un premier résultat sur la bissectrice AE.
Traçons la parallèle à (AE) passant par B. Cette droite coupe (AC) en F.



Puisque $\widehat{ACE} = \widehat{FCB}$ et $\widehat{CAE} = \widehat{CFB}$ (angles correspondants), les triangles CBF et CEA sont semblables et on a $\dfrac{CB}{CE} = \dfrac{CF}{CA}$.

On en déduit $\dfrac{CE + EB}{CE} = \dfrac{CA + AF}{CA}$ qui donne $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AF}{AC}$.

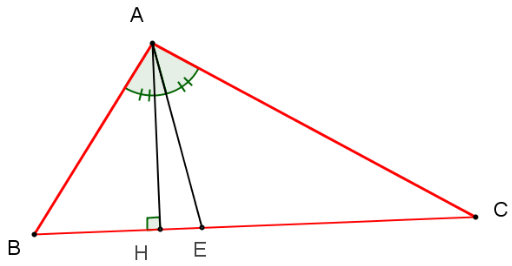
Les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{EAB}$ sont alternes-internes et donc égaux. Et puisque $\widehat{ABF} = \widehat{AFB}$, le triangle ABF est isocèle en A et AF = AB. On obtient donc le résultat suivant :

Dans un triangle ABC, si E est le pied de la bissectrice issue de A, alors $\boxed{\mathbf{\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}}}$.

• Un deuxième résultat sur la bissectrice AE

On a $AB^2 = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB})^2 = AE^2 + EB^2 + 2\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EB} = AE^2 + EB^2 + 2\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{EB}$ où H est le projeté orthogonale de A sur (BC).
De même, $AC^2 = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC})^2 = AE^2 + EC^2 + 2\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EC} = AE^2 + EC^2 + 2\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{EC}$

On a alors $AB^2 = AE^2 + EB^2 - 2EH\times EB$
et $AC^2 = AE^2 + EC^2 + 2EH\times EC$



En multipliant la première égalité par EC et la seconde par EB, celles-ci deviennent :

$EC\times AB^2 = EC\times AE^2 + EC\times EB^2 - 2EH\times EB\times EC$
$EB\times AC^2 = EB\times AE^2 + EB\times EC^2 + 2EH\times EC\times EB$

Et en les ajoutant :

$EC\times AB^2 + EB\times AC^2 = \mathbf{EC\times AE^2} + EC\times EB^2 + \mathbf{EB\times AE^2} + EB\times EC^2$

$EC\times AB^2 + EB\times AC^2 = \mathbf{AE^2\ (EC + EB)} + EC\times EB\ (EB + EC)$ (*)

De l'égalité $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$ (1er résultat), on obtient $AB\times CE = BE\times AC$ et on peut transformer $EC\times AB^2 + EB\times AC^2$ en $AB\times \mathbf{BE\times AC} + \mathbf{AB\times CE}\times AC = AB\times AC\times(BE + CE)$

L'égalité (*) devient donc $AB\times AC\times(BE + CE) = \mathbf{AE^2\ (EC + EB)} + EC\times EB\ (EB + EC)$ ou plus simplement $\boxed{\mathbf{AB\times AC = AE^2 + EC\times EB}}$ **Formule ②**

☞ **On peut enfin démontrer l'inégalité demandée à l'aide des deux formules démontrée précédemment :**

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2} \qquad \textbf{Formule ①}$$
$$\mathbf{AB\times AC = AE^2 + EC\times EB} \qquad \textbf{Formule ②}$$

En faisant la première égalité moins deux fois la seconde, on obtient :

$$AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2AE^2 - 2EC\times EB$$

$$(AB - AC)^2 - \frac{1}{2}BC^2 + 2EC\times EB = 2AD^2 - 2AE^2$$

Donc $2AD^2 - 2AE^2 = (AB - AC)^2 - \frac{1}{2}(BC^2 - 4EC\times EB)$

$$2AD^2 - 2AE^2 = (AB - AC)^2 - \frac{1}{2}((BE + EC)^2 - 4EC\times EB)$$

$$2AD^2 - 2AE^2 = (AB - AC)^2 - \frac{1}{2}(BE^2 + EC^2 - 2EC\times EB)$$

$$2AD^2 - 2AE^2 = (AB - AC)^2 - \frac{1}{2}(BE - EC)^2$$

$$2AD^2 - 2AE^2 \leqslant (AB - AC)^2$$

$$\boxed{\mathbf{AD^2 - AE^2 \leqslant \frac{1}{2}(AB - AC)^2}}$$

Olivier Rochoir