Les dés sont jetés, mais pas au hasard ! (Sujet n° 12)

<u>Énoncé :</u>

On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris (au sens large) entre 0 et $\frac{n}{3}$ soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

<u>Solution</u> :

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 lorsqu'on lance n fois le dé. La probabilité d'avoir un 6 lorsqu'on lance le dé une fois étant $p = \frac{1}{6}$, X suit la loi binomiale $B(n\ ;\ \frac{1}{6})$.

Rappelons **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev** :

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha > 0,\ P(\ |X - E(X)| \geqslant \alpha\ ) \leqslant \frac{(\sigma(X))^2}{\alpha^2}}$$

On a aussi $1 - P(\ |X - E(X)| \leqslant \alpha\ ) \leqslant \frac{(\sigma(X))^2}{\alpha^2}$, donc $P(\ |X - E(X)| \leqslant \alpha\ ) \geqslant 1 - \frac{(\sigma(X))^2}{\alpha^2}$

Or si X suit une loi binomiale, $E(X) = np = \frac{n}{6}$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \frac{\sqrt{5n}}{6}$.

Donc $P(\ \frac{n}{6} - \alpha \leqslant X \leqslant \frac{n}{6} + \alpha\ ) \geqslant 1 - \frac{5n}{36\alpha^2}$

En prenant $\alpha = \frac{n}{6}$, on obtient alors $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}) \geqslant 1 - \frac{5}{n}$

Si on veut $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}) \geqslant \frac{1}{2}$, il faut prendre $1 - \frac{5}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $n \geqslant 10$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre donc qu'en prenant $n \geqslant 10$, on a l'inégalité demandée :
$P(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}) \geqslant \frac{1}{2}$.

Que se passe-t-il pour les n < 10 ?

La probabilité que le nombre de 6 soit égale à k lorsqu'on lance n fois le dé est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

Si on lance 1 fois le dé (n = 1), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}) = P(X = 0) = \frac{5}{6}$.

Si on lance 2 fois le dé (n = 2), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{2}{3}) = P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$. (La probabilité a changé par rapport à la précédente puisque n a changé)

Si on lance 3 fois le dé (n = 3), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{3}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{27}$

Si on lance 4 fois le dé (n = 4), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{4}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{144}$

Si on lance 5 fois le dé (n = 5), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{5}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{3888}$

Si on lance 6 fois le dé (n = 6), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{6}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5 + 15\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}9377$

Si on lance 7 fois le dé (n = 7), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{7}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}9042$

Si on lance 8 fois le dé (n = 8), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{8}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}8652$

Si on lance 9 fois le dé (n = 9), on a $P(0 \leqslant X \leqslant \frac{9}{3}) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0{,}9520$

On remarque alors que toutes les probabilités précédentes sont supérieures à $\frac{1}{2}$.

Par conséquent, **dès qu'on lance un dé à 6 faces (et quelque soit le nombre de lancers), on aura une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $\frac{n}{3}$ (au sens large).**

Olivier Rochoir