Équation fonctionnelle ! (Sujet n° 10)

Énoncé :

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$f(0) = 2014$ et pour tout réel x, $f(8x) + f(18x) = 2f(12x)$

Solution :

L'égalité $f(8x) + f(18x) = 2f(12x)$ peut aussi s'écrire $\boxed{\mathbf{f(18x) - f(12x) = f(12x) - f(8x)}\ ❶}$

Posons, pour tout x réel, $\mathbf{x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n x}$.

☞ Montrons par récurrence que $\boxed{\mathbf{f(18x) - f(12x) = f(18x_n) - f(12x_n)}\ ❷}$ pour tout n entier.

• L'égalité est vérifiée pour n = 0 puisque $x_0 = x$.
• Posons comme hypothèse de récurrence : Il existe p entier tel que $f(18x) - f(12x) = f(18x_p) - f(12x_p)$.
• Et montrons que la relation ❷ est vraie au rang p + 1.

On a $f(18x_{p+1}) - f(12x_{p+1}) = f\left(18\times\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} x\right) - f\left(12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} x\right) = f\left(12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{p} x\right) - f\left(8\times\left(\frac{2}{3}\right)^{p} x\right) = f(12x_p) - f(8x_p)$.

Or, d'après ❶, on a $f(12x_p) - f(8x_p) = f(18x_p) - f(12x_p)$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $f(18x_{p+1}) - f(12x_{p+1}) = f(18x) - f(12x)$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(18x) - f(12x) = f(18x_n) - f(12x_n)$.

☞ $\boxed{\text{La fonction f étant continue, on a, pour toute suite } u_n \text{ vérifiant } \lim_{n \to +\infty} u_n = a,\ \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a).}$

On a $\mathbf{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0}$ (puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$).

Donc par passage à la limite dans l'égalité ❷, on obtient $f(18x) - f(12x) = f(0) - f(0) = 0$

On en déduit que **pour tout x réel, f(18x) = f(12x). ❸**

La relation ❸ étant valable pour tout x réel, elle est vraie pour le réel $\frac{x}{18}$ donc $f\left(18\times\frac{x}{18}\right) = f\left(12 \times \frac{x}{18}\right)$.

On a donc $f(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$.

Par une récurrence identique à la précédente, on montre que $f(x) = f(x_n)$ et par passage à la limite que :

Pour tout x réel, f(x) = f(0).

Autrement dit, la seule fonction f vérifiant l'énoncé est **la fonction constante f(x) = 2014**.

Olivier Rochoir