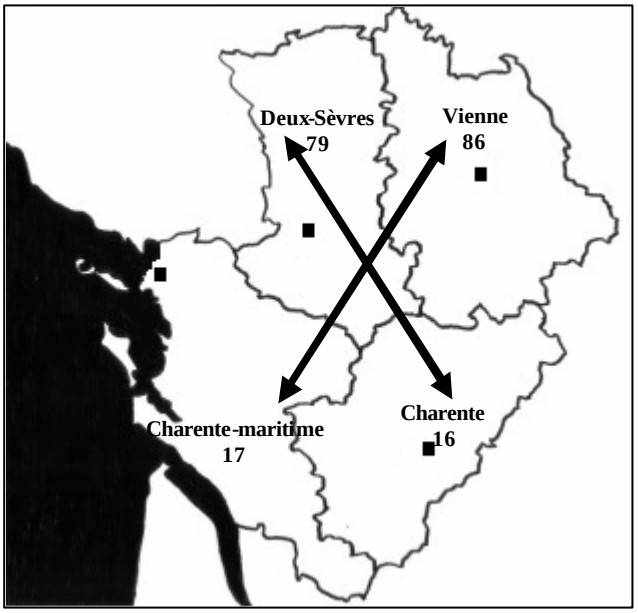
**Une somme déterminante ?**




Les numéros des quatre départements de la région Poitou-Charentes sont liés ensemble par une relation qui peut sembler étonnante. Observez plutôt :

$$16 + 17 + 79 + 86 = 86\times17 - 79\times16 .$$

La relation :

$$a + b + c + d = db - ca \quad \text{avec} \quad a < b < c < d \quad (1)$$

entre les numéros de quatre départements est-elle exceptionnelle ?

*Pour les besoins de l'exercice vous conviendrez de la numérotation fantaisiste suivante : 20 (Corse du Sud) ; 96 (Haute Corse) ; 97 (Guadeloupe) ; 98 (Martinique) ; 99 (Guyane) ; 100 (Réunion). Ainsi vous disposerez des 100 départements français numérotés de 1 à 100.*

a) Donner quatre autres numéros de département vérifiant la relation (1) et produisant de plus exactement le même résultat que la région Poitou-Charentes à savoir 198.

b) La relation (1) peut-elle produire un résultat impair ?

c) Au total, combien peut-on former de groupes de quatre départements vérifiant la relation (1) ?

**Eléments de solution**

a) Un exemple parmi d'autres : $1+3+96+98=98\times3-96\times1=198$

b) Un exemple parmi d'autres : $1+2+3+9=9\times2-1\times3=15$

c) L'équation (1) peut se factoriser sous la forme :

$$(a+1)(c+1)=(d-1)(b-1)$$

On simplifie cette équation en posant A = $a$ + 1, B = $b$ – 1, C = $c$ – 1 et D = $d$ – 1.
Il s'agit alors de trouver quatre entiers A, B, C et D tels que :

$$AC = BD \text{ avec } 2 \leq A < B + 2 < C < D + 2 \text{ et } D \leq 99$$

Il y a trois cas à étudier.

- Si A< B alors C > D et on a nécessairement C = D + 1.

L'équation s'écrit alors AC = B(C-1). Comme C et C - 1 sont premiers entre eux, C divise B. Il existe donc un entier $k$ non nul tel que B = $k$C.
Mais alors C – B = C(1- $k$) < 2. Il n'y a donc pas de solution.

- On a ensuite l'équivalence suivante : A = B ⇔ C = D. Il s'agit alors de compter le nombre de couples d'entiers (A, $k$) tels que :

$2 \leq A < A + 2 + k \leq 99$ avec $k \geq 1$.
Il y a 4560 couples qui répondent aux contraintes de ce cas de figure et donc autant de quadruplets ($a$, $b$, $c$, $d$) solutions de l'équation (1).

- Pour finir, il reste à examiner le cas où A = B + 1.

L'équation AC = (A – 1)D avec ses contraintes sur A, B, C et D se traduit alors par $2 \leq A < A + 1 < k(A - 1) < kA + 2$ et $kA \leq 99$ avec $k \geq 1$.
Cela se résume en : $2 \leq A \leq 99/k$ et $k > (A + 1)/(A - 1)$.
Pour A = 2 on a $4 \leq k \leq 49$ (46 solutions).
Pour A = 3 on a $3 \leq k \leq 33$ (31 solutions).
Pour A ≥ 4 on doit avoir : $2 \leq k \leq 99/A$. L'entier A ne peut donc excéder 49. On compte, pour chaque entier A compris entre 4 et 49, le nombre de valeurs de $k$ qui réalisent l'inégalité. On aboutit à un total de 196. Il y a au total 273 couples (A, $k$) solutions des deux inégalités et donc autant de quadruplets ($a$, $b$, $c$, $d$) solutions de l'équation (1).

Soit un total de 4833 quadruplets ($a$, $b$, $c$, $d$) possibles.