**<u>Enoncé</u>**
**On considère les 7 nombres 1,2,3,4,5,6,7.**
**A chaque étape, on choisit deux nombres a et b parmi les 7, et on les remplace par** $\frac{2a+b}{3}$ **et** $\frac{a+2b}{3}$.
**On obtient alors une nouvelle liste de 7 nombres, et on recommence avec cette nouvelle liste.**

**1°) Peux -t-on, au bout d'un nombre fini d'étapes, obtenir 7 fois le chiffre 3 ?**
**2°) Peux -t-on, au bout d'un nombre fini d'étapes, obtenir 7 fois le chiffre 4 ?**

<u>Réponse :</u>
1°) On remarque que $\frac{2a+b}{3}+\frac{a+2b}{3}=a+b$ .
Ainsi , à chaque étape la liste est modifiée, mais la somme des 7 nombres ne varie pas.
La somme initiale étant 28, il est impossible d'obtenir 7 fois le chiffre 3, puisque 7x3=21.

2°) Lors d'une étape, envisageons l'ensemble des cas suivants :

Si a=4 et b=4, alors $\frac{2a+b}{3}=4$ et $\frac{a+2b}{3}=4$ Le nombre de 4 dans la liste ne varie pas.

Si a=4 et b≠4 alors $\frac{2a+b}{3}=\left(\frac{8+b}{3}\right)\neq 4$ et $\frac{a+2b}{3}=\left(\frac{4+2b}{3}\right)\neq 4$ Le nombre de 4 dans la liste diminue de 1.

Si a≠4 et b≠4, alors $\frac{2a+b}{3}$ peut être égal à 4 à condition que $2a+b=12$ (exemple : a=5 et b=2) mais alors $\frac{2b+a}{3}$ ne peut être égale à 4 car cela entrainerait que $\frac{2a+b}{3}=\frac{a+2b}{3}=4$ c'est à dire $a=b=4$ . Donc le nombre de 4 dans la liste peut augmenter de 1.

On conclue donc que lors d'une étape , le nombre de 4 peut diminuer de 1, rester stationnaire, ou augmenter de 1.
En conséquence, pour obtenir 7 fois 4 au bout d'un nombre fini d'étapes, il est donc nécessaire qu'à l'étape qui précède, il y ait 6 fois le nombre 4 et un septième nombre b différent de 4.
Or ceci est impossible, car si l'on fait la somme de ces 7 nombres , on obtient : $24+b\neq 28$

Il est donc impossible d'obtenir une liste de 7 fois le nombre 4.