Problème de la Quinzaine

L'énoncé

Montrer que :

$$\cos(\frac{\pi}{20})+\cos(\frac{9\pi}{20})=\frac{1}{2}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

Une proposition de solution

Par formules de trigonométrie, on a :

$$\cos(\frac{\pi}{20})+\cos(\frac{9\pi}{20})=2\times\cos(\frac{\frac{\pi}{20}+\frac{9\pi}{20}}{2})\times\cos(\frac{\frac{\pi}{20}-\frac{9\pi}{20}}{2})$$

Soit :

$$\cos(\frac{\pi}{20})+\cos(\frac{9\pi}{20})=2\times\cos(\frac{\pi}{4})\times\cos(\frac{-\pi}{5})$$

Or $\cos(\frac{-\pi}{5})=\cos(\frac{\pi}{5})$ par parité de la fonction cosinus.
Ainsi,

$$\cos(\frac{\pi}{20})+\cos(\frac{9\pi}{20})=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos(\frac{\pi}{5})=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{5}) \qquad \textbf{(1)}$$

Montrons maintenant tour à tour que $\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\frac{1}{2}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

- Par formules de trigonométrie, on a :

$$\cos(\frac{\pi}{5})-\cos(\frac{2\pi}{5})=2\sin(\frac{3\pi}{10})\times\sin(\frac{\pi}{10})=2\cos(\frac{\pi}{5})\times\sin(\frac{\pi}{10})=\frac{\sin(\frac{\pi}{5})\times\cos(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{10})}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(\frac{2\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{10})}=\frac{1}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

- Par ailleurs, on a :

$$\cos(\frac{\pi}{5})\times\cos(\frac{2\pi}{5})=\sin(\frac{\pi}{5})\times\cos(\frac{\pi}{5})\times\frac{\cos(\frac{2\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(\frac{2\pi}{5})\times\cos(\frac{2\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})}=\frac{1}{4}\times\frac{\sin(\frac{4\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})}=\frac{1}{4} \qquad \textbf{(3)}$$

- De (2) et (3) on tire que :

$$\cos(\frac{\pi}{5})\times\cos(\frac{2\pi}{5})=\cos(\frac{\pi}{5})\times(\cos(\frac{\pi}{5})-\frac{1}{2})=\cos(\frac{\pi}{5})^2-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{1}{4}$$

  Par suite, $\cos(\frac{\pi}{5})$ est la solution positive de l'équation du second degré suiante : $2\cos(\frac{\pi}{5})^2-\cos(\frac{\pi}{5})-\frac{1}{2}=0$ donc on en on deduit que $\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

- En injectant ce résultat dans (1), il vient finalement que :

$$\cos(\frac{\pi}{20})+\cos(\frac{9\pi}{20})=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

- Comme en outre $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}>0$ et $\frac{1}{2}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}>0$ et que $(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2=(\frac{1}{2}\times\sqrt{3+\sqrt{5}})^2$ on en déduit que :

$$\cos(\frac{\pi}{20})+\cos(\frac{9\pi}{20})=\frac{1}{2}\times\sqrt{3+\sqrt{5}} \qquad \textbf{\textit{CQFD}}$$