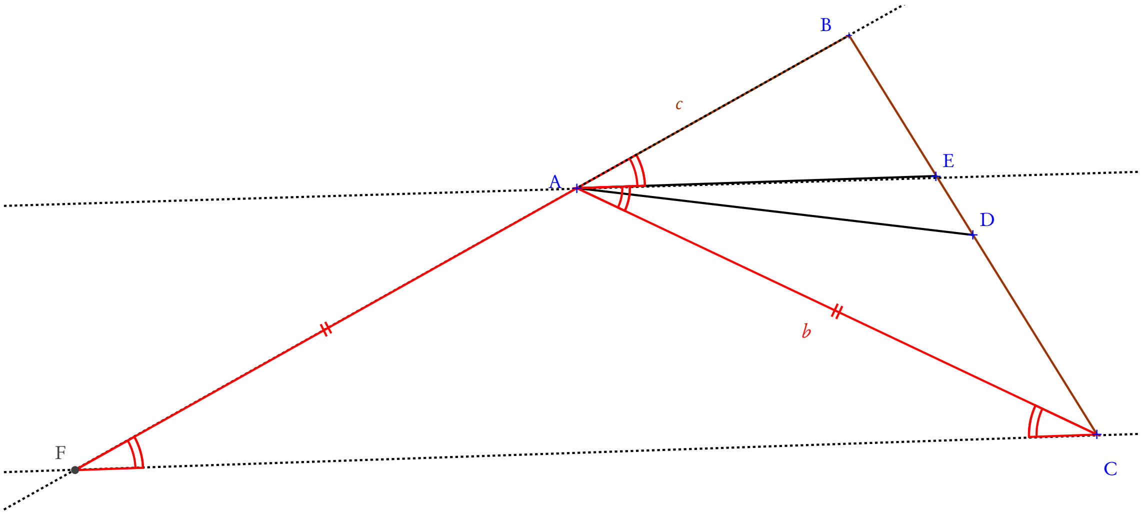
Énoncé du problème

Soit ABC un triangle quelconque. Les droites (AE) et (AD) représentent respectivement la bissectrice et la médiane du triangle ABC issues du point A. Montrer que :

$$0 \leqslant \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AE}^2 \leqslant \frac{(b-c)^2}{2}$$



Solution

La figure a été prolongée en traçant la parallèle à la bissectrice passant pa C, afin de redémontrer une propriété classique de la bissectrice. Cette parallèle permet d'obtenir le triangle isocèle ACF et d'appliquer le théorème de Thalés pour obtenir :

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AF}} \quad \Rightarrow \quad b \times \mathrm{EB} = c \times \mathrm{EC}$$

Or $\mathrm{E} \in [\mathrm{BC}]$, on a donc $b\overrightarrow{\mathrm{EB}} + c\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \overrightarrow{0}$, ce qui permet de voir que E est barycentre de (C, c) et (B, b). On peut donc calculer AE^2 de la manière suivante :

$$\mathrm{AE}^2 = \left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2 = 2\frac{b^2c^2}{(b+c)^2} + 2\frac{bc}{(b+c)^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

Un même calcul avec l'isobarycentre de B et C permet d'écrire une autre relation classique concernant la médiane :

$$\mathrm{AD}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{4} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

Le développement de $a^2 = \overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2$ permet d'écrire le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sous la forme $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$; on en déduit les deux expressions suivantes :

- $\mathrm{AD}^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$
- $\mathrm{AE}^2 = \dfrac{2b^2c^2+b^3c+bc^3-a^2bc}{(b+c)^2} = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$

La soustraction de ces deux expressions nous donnent successivement :

$$\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AE}^2 = \frac{2b^2+2c^2-4bc-a^2}{4} + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AE}^2 = \frac{(b-c)^2}{2} - a^2\frac{(b+c)^2-4bc}{4(b+c)^2}$$

$$\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AE}^2 = \frac{(b-c)^2}{2}\left[1 - \frac{a^2}{2(b+c)^2}\right]$$

Or d'après l'inégalité triangulaire, le quotient $\dfrac{a}{b+c}$ est dans l'intervalle $[0;1]$, on en déduit : $1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$; on a donc l'encadrement :

$$\boxed{\frac{(b-c)^2}{4} \leqslant \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AE}^2 \leqslant \frac{(b-c)^2}{2}}$$