

Présentation du neurone artificiel

1. Problématique

Est-il possible à l'aide d'un unique neurone artificiel de construire des fonctions logiques ?
Cette construction est elle unique ?

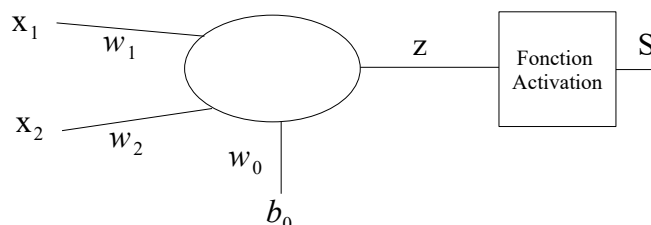
2. Introduction

2.1. Le neurone artificiel

En informatique les neurones sont définis à l'aide d'un modèle mathématiques qui a été présenté en 1943 par Warren McCulloch et Walter Pitts. Ils se sont inspirés des propriétés biologiques des neurones humains connus à l'époque. Aujourd'hui, on sait que c'est une approximation et que le système nerveux humain est bien plus complexe. Cependant ce modèle est toujours le plus utilisé aujourd'hui et c'est celui que nous étudierons.

2.2. Représentation d'un neurone formel

Un neurone formel peut être représenté de la façon suivante:



Les entrées

x_1 et x_2 sont deux entrées, il est possible d'en ajouter sans limite.
 b_0 est le biais qui est une constante.

Les sorties

Z est une sortie intermédiaire et est définie par :

$$Z = b_0 \times w_0 + x_1 \times w_1 + x_2 \times w_2$$

S est la sortie du neurone, nous utiliserons la fonction sigmoïde comme fonction d'activation mais il en existe d'autres.

La fonction sigmoïde est définie sur \mathbb{R} par $f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$

On a donc $S = f(z)$

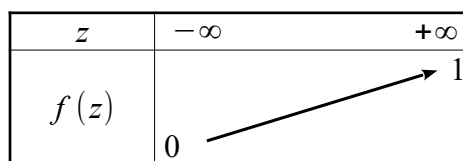
2.3. Neurone et fonction logique

Une fonction logique admet en sortie deux états Vrai ou Faux.

On choisit la convention suivante :

- si $S \geq 0,5$ alors S est Vrai,
- si $S < 0,5$ alors S est faux.

Les variations de la fonction sigmoïde sont :



a) Justifier que l'équation $f(z) = 0,5$ admet une unique solution.

b) Résoudre l'équation $f(z) = 0,5$

- c) Justifier le seuil choisi pour discriminer l'état vrai de l'état faux. Était-il possible de choisir une autre valeur et si oui laquelle (lesquelles) ?
- d) Pour conclure recopier et compléter le tableau suivant :

S	Valeur de S	Valeur de Z
Si S est Vrai		
Si S est faux		

3. La fonction logique ET

L'objectif de cette partie est de simuler le fonctionnement d'un ET logique dont les entrées sont x_1 et x_2 et la sortie S à l'aide d'un neurone formel.

On appliquera les conventions suivantes :

- une entrée x_i est fautive pour $x_i=0$ et vraie pour $x_i=1$, de même pour l'état logique de la sortie S noté SL,
- afin de simplifier les calculs on impose $b_0=-1$

a) Recopier puis compléter le tableau de la fonction logique ET ci-dessous

x_1	x_2	État logique de S=SL	Valeur de Z	Valeur de S
0	0	0	<0	<0,5

b) Écrire la relation liant w_0 , w_1 , w_2 et Z.

c) Dédire de la table précédente quatre inéquations faisant intervenir w_0 , w_1 et w_2 .

d) Donner une solution vérifiant les quatre inéquations.

e) Implémentation en python de la fonction logique ET.

Écrire une fonction `et(x1:int ,x2:int)->int` à l'aide du modèle mathématique d'un neurone et des coefficients trouvés précédemment. Les paramètres sont les x_i et la fonction renvoie l'état logique de S, puis tester le bon fonctionnement de la fonction logique.

f) Comparer vos coefficients w_i avec vos voisins. Est-il possible de construire une fonction logique ET avec un neurone ? Les coefficients w_i sont-ils uniques ?

4. La fonction logique OU

a) En utilisant les conventions précédentes recopier et compléter le tableau de la fonction logique OU. Puis en déduire des coefficients w_i solutions des inéquations.

x_1	x_2	État logique de S SL	Valeur de Z	Valeur de S
0	0	0	<0	<0,5

b) Sur le modèle de la fonction logique ET implémentée précédemment en déduire des coefficients w_i puis une implémentation en python de la fonction logique OU.

c) Proposer une modification simple des coefficients w_i afin de transformer la fonction logique OU en NON OU.

5. Implémentation en Python des fonctions logiques précédentes

L'objectif de cette partie est de montrer qu'en utilisant un neurone artificiel il n'est pas nécessaire de réécrire un nouveau programme informatique pour chaque fonction réalisée.

On donne le fichier `logic_neuronal_el.py`.

Compléter la fonction `logic_function(wi:tuple, x1:int ,x2:int)->int` du fichier qui admet en paramètres :

- w_i : est un tuple dont les valeurs sont les coefficients w_0 , w_1 et w_2 , trouvés précédemment,
- x_1 et x_2 : sont les entrées de la fonction logique.

Cette fonction renvoie l'état logique de la sortie S du neurone.

On utilisera le dictionnaire `weights` de tuple avec les clés "et", "ou" et "non ou" contenant les w_i .

La fonction doit vérifier les « asserts » du fichier fourni.

6. La fonction logique OU EXCLUSIF XOR

a) En utilisant les conventions précédentes recopier et compléter le tableau de la fonction logique XOR.

x_1	x_2	SL	Valeur de Z	Valeur de S
0	0	0	<0	<0,5

b) Puis en déduire des coefficients w_i solutions des inéquations. Que constatez-vous ?

c) Un neurone artificiel est-il capable de simuler toutes les fonctions logiques ? Comment dépasser cette limitation ?

d) Proposer une implémentation possible d'un ou exclusif en utilisant les fonctions précédentes.