Corrigé du sujet n° 1

Je vais utiliser les relations suivantes : $AD^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ et $AE^2 = \dfrac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}$, Le premier résultat est classique, c'est le théorème de la médiane ; mais le deuxième résultat est peu connu, donc je commence par le démontrer.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACE) + \mathcal{A}(ABE) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}b \times AE \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}c \times AE\sin\frac{A}{2} \\
&\Leftrightarrow bc\sin A = (b+c)\times AE\sin\frac{A}{2} \\
&\Leftrightarrow AE = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} \\
&\Leftrightarrow AE^2 = \frac{4b^2c^2\cos^2\dfrac{A}{2}}{(b+c)^2}
\end{aligned}$$

la relation d'Al Kashi et $1+\cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2}$ permettent d'écrire $2\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$.
D'où $AE^2 = \dfrac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}$.

$$\begin{aligned}
AD^2 - AE^2 &= \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} - \frac{bc((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2} \\
&= \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} - bc + \frac{bca^2}{(b+c)^2} \\
&= \frac{2b^2+2c^2-a^2-4bc}{4} + \frac{bca^2}{(b+c)^2} \\
&= \frac{2(b-c)^2-a^2}{4} + \frac{bca^2}{(b+c)^2} \\
&= \frac{2(b-c)^2(b+c)^2 - a^2(b+c)^2 + 4bca^2}{4(b+c)^2} \\
&= \frac{2(b-c)^2(b+c)^2 - a^2(b-c)^2}{4(b+c)^2} \\
&= \frac{(b-c)^2(2(b+c)^2-a^2)}{4(b+c)^2}
\end{aligned}$$

J'ai donc $AD^2 - AE^2 \geqslant 0$, car $b+c>a$ et $\dfrac{(b-c)^2(2(b+c)^2-a^2)}{4(b+c)^2} \leqslant \dfrac{(b-c)^2}{2}$. CQFD