Corrigé du sujet n° 4

On remarque qu'on a : $A_1 = \mathscr{A}(AEH) = \dfrac{1}{2} AE \times AH \times \sin A = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{AB}{2} \times \dfrac{AD}{2} \times \sin A = \dfrac{\mathscr{A}(ABD)}{4}$.

De même, on montre que : $A_2 = \mathscr{A}(BEF) = \dfrac{\mathscr{A}(BAC)}{4}$, $A_3 = \mathscr{A}(CFG) = \dfrac{\mathscr{A}(CBD)}{4}$,

$A_4 = \mathscr{A}(DGH) = \dfrac{\mathscr{A}(DAC)}{4}$.

On a donc $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \dfrac{\mathscr{A}(ABD) + \mathscr{A}(BAC) + \mathscr{A}(CBD) + \mathscr{A}(DAC)}{4} = \dfrac{\mathscr{A}(ABCD)}{2} = \dfrac{A}{2}$.

On considère la fonction suivante : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. f est concave car $f''(x) \leqslant 0$, donc

$$f\left(\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}\right) \geqslant \frac{f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + f(A_4)}{4}.$$

Or $f\left(\dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}\right) = f\left(\dfrac{A}{8}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{2}$, donc $\dfrac{\sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A_3} + \sqrt[3]{A_4}}{4} \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{A}}{2}$.

Soit $\sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A_3} + \sqrt[3]{A_4} \leqslant 2\sqrt[3]{A}$