Corrigé du sujet n^{o} 12

On suppose que le dé est équilibré et que les lancers sont indépendants les uns des autres. Si on appelle X le nombre de "6" obtenus en n lancers. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.
On a donc $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{6}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{5n}{36}$. Il me reste à déterminer n pour qu'on ait $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}) \geqslant \frac{1}{2}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev me permet d'écrire : $\mathbb{P}(|X - \frac{n}{6}| > \frac{n}{6}) \leqslant \frac{5n}{36 \times \frac{n^2}{36}}$.
Soit $1 - \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}) \leqslant \frac{5}{n} \Leftrightarrow \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}) \geqslant 1 - \frac{5}{n}$.
Pour répondre à la question posée, il suffit de résoudre l'inéquation suivante : $1 - \frac{5}{n} \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui donne $n \geqslant 10$.
Il me reste à traiter les cas particuliers pour $1 \leqslant n \leqslant 9$ (voir O.Rochoir ou F.De Ligt).