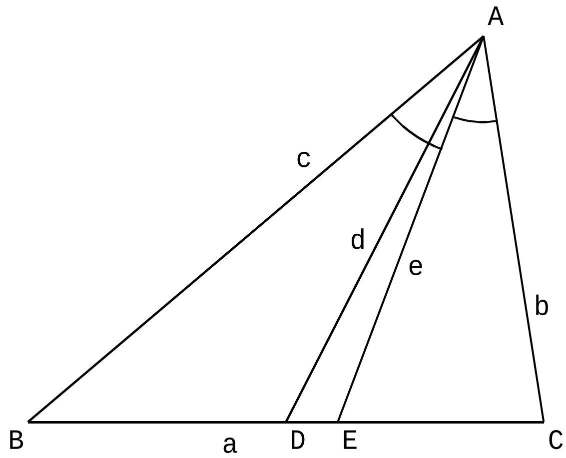
Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 1



On conserve les notations de l'énoncé et, pour alléger les écritures, on note aussi AD = d et AE = e.

Propriété 1. Dans un triangle, d'après le théorème d'Apollonius, le carré de la longueur d'une médiane s'exprime en fonction des trois côtés, cela donne ici : $d^2 = (c^2 + b^2)/2 - a^2/4$ (1)

Propriété 2. Dans un triangle, le carré de la longueur d'une bissectrice s'exprime à l'aide des deux côtés de l'angle bissecté et des longueurs des segments déterminés par le pied de cette bissectrice, cela donne ici : $e^2 = bc - \text{EB}\times\text{EC}$ (2)

On a donc par soustraction des expressions (1) et (2) :
$d^2 - e^2 = (c^2 + b^2)/2 - a^2/4 - bc + \text{EB}\times\text{EC} = (b - c)^2/2 - a^2/4 + \text{EB}\times\text{EC}$ (3)

Propriété 3. Si M est un point du segment [BC], le produit MB×MC est maximum quand M est au milieu de [BC], c'est-à-dire ici en D.

Par conséquent la quantité $\text{EB}\times\text{EC} - a^2/4 = \text{EB}\times\text{EC} - \text{DB}\times\text{DC}$ est toujours négative et s'annulle quand E est en D.
D'où l'inégalité $d^2 - e^2 \leq (b - c)^2/2$ avec égalité quand le triangle est isocèle en A.

On passe maintenant à la seconde l'inégalité demandée.

Propriété 4. On sait que dans un triangle le pied d'une bissectrice partage le côté auquel il appartient proportionnellement aux côtés de l'angle bissecté, cela donne ici : EC/EB = b/c.

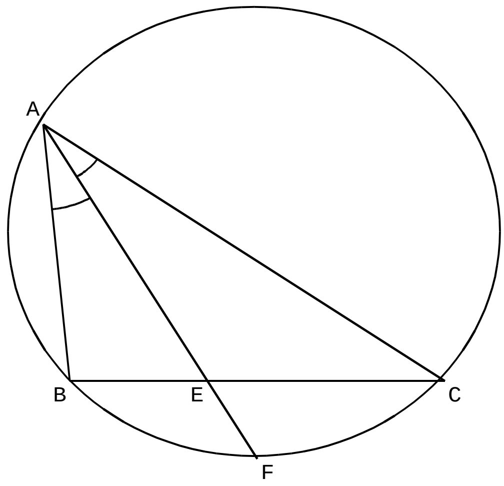
Par ailleurs EC + EB = a, d'où EC = $ab/(b + c)$ et EB = $ac/(b + c)$.
L'égalité (3) s'écrit alors :

$$d^2 - e^2 = \frac{(b-c)^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{(b-c)^2}{2} - \frac{a^2(b-c)^2}{4(b+c)^2} = \frac{(b-c)^2}{2} \times \left(1 - \frac{a^2}{2(b+c)^2}\right)$$

Mais $1 - \dfrac{a^2}{2(b+c)^2} > 0$ car $a < b + c$ d'après l'inégalité triangulaire.

Par conséquent $d^2 - e^2 \geq 0$ avec égalité quand le triangle est isocèle en A.
On a finalement la double inégalité $0 \leq d^2 - e^2 \leq (b - c)^2/2$.

Remarque :
On a utilisé 4 propriétés pour résoudre l'exercice. Le théorème d'Apollonius est classique, il n'est pas utile d'en redonner une preuve, de même pour les propriétés 3 et 4. La propriété 2 est moins connue, en voici une preuve.



Soit F, le point d'intersection de la bissectrice (AE) avec le cercle circonscrit au traingle ABC. Les triangles AEB et ACF sont semblables comme ayant une paire d'angles égaux. Les côtés correspondants sont alors proportionnels:
$AB/AF = AE/AC$ ou encore $AB\times AC = AE\times AF = AE\times(AE + EF) = AE^2 + AE\times EF$ (4)
Mais les triangles AEB et CEF sont semblables pour la même raison qu'auparavant et on a aussi l'égalité des rapports : $AE/EC = EB/EF$ ou encore $AE\times EF = EB\times EC$ (5)
En utilisant l'égalité (5) dans l'égalité (4), on obtient :
$AB\times AC = AE^2 + AE\times EF = AE^2 + EB\times EC$,
doù l'égalité (2) annoncée.