Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 10

Soit f une fonction continue de **R** dans **R** vérifiant l'équation fonctionnelle pour tout x réel :

$$f(8x) + f(18x) = 2f(12x) \qquad (1)$$

On va prouver par récurrence que f vérifie alors pour tout entier naturel n l'équation fonctionnelle valable pour tout x réel : $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} x\right) + f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n} x\right) = 2f(x)$ (2).

- Pour $n = 0$, on pose $y = 12x$ et l'équation (1) prend la forme équivalente $f\left(\frac{2}{3}y\right) + f\left(\frac{3}{2}y\right) = 2f(y)$ ou encore, en posant $x = y$, $f\left(\frac{2}{3}x\right) + f\left(\frac{3}{2}x\right) = 2f(x)$.
- Soit n un entier naturel, on suppose l'équation (2) vérifiée au rang n pour tout x réel.

On pose $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} x$ et l'équation (2) prend la forme équivalente $f(y) + f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{n+1}} y\right) = 2f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n} y\right)$

ou encore, en posant $x = y$, $f(x) + f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{n+1}} x\right) = 2f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n} x\right)$ (3).

On pose $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2^n} x$ et l'équation (2) prend la forme équivalente $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}} y\right) + f(y) = 2f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} y\right)$

ou encore en posant $x = y$, $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}} x\right) + f(x) = 2f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} x\right)$ (4). On additionne les équations (2), (3) et (4) et on obtient $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}} x\right) + f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{n+1}} x\right) = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} x\right) + f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n} x\right) = 2f(x)$.

Ceci étant établi, on a prouvé du même coup que l'équation fonctionnelle (4) est vérifiée par f pour tout x réel et tout entier naturel n. Pour un réel donné x, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} x$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}} x$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini et par continuité de la fonction f, $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} x\right)$ et $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}} x\right)$ tendent vers $f(0)$. Par conséquent $f(x) = f(0) = 2014$. La fonction f ne peut qu'être la fonction constante associant à tout réel x le nombre 2014. On vérifie ensuite que cette fonction est bien une solution de l'équation fonctionnelle (1) proposée.