DEVOIR MAISON 7

1. Sur le graphique ci-dessous, dessiner la représentation d'une fonction :

- définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$;
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- de limite nulle en $-\infty$;
- et de limite 1 en $+\infty$.

Soit s la fonction définie par $\quad s(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. On note $\mathscr{C}_s$ sa courbe représentative dans un repère.

2. Sans calculs, justifier que s est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que s est bornée par 0 et 1 sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer les limites de s en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les équations de deux asymptotes à $\mathscr{C}_s$.

5. **Bonus :** Démontrer que s est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en utilisant la définition d'une fonction strictement croissante).

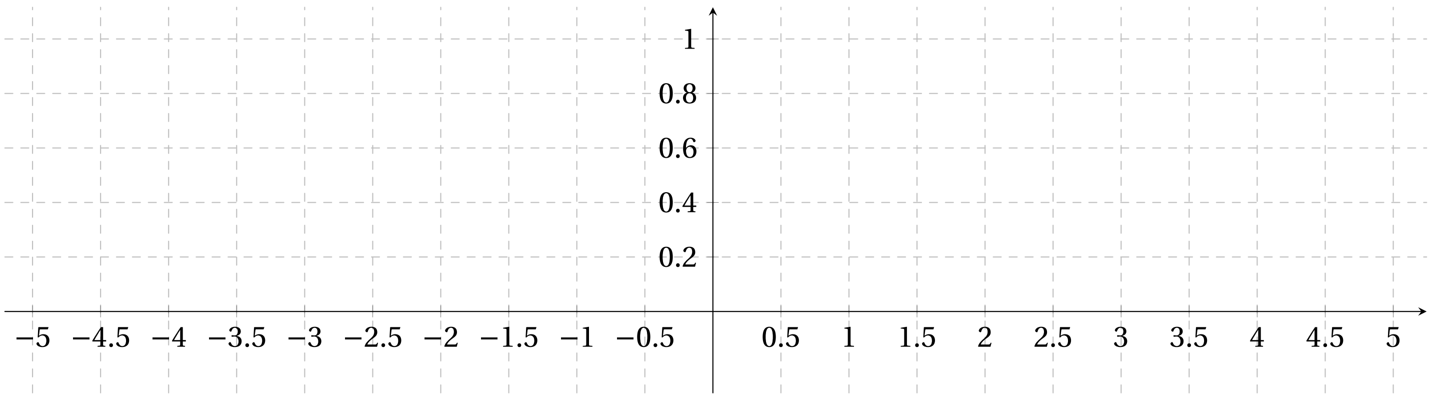
6. Démontrer que $\quad s'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \quad$ et que $\quad s'(x) = s(x)\,(1-s(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7. Étudier les variations de s sur $\mathbb{R}$.

8. Démontrer que $\quad s''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}$. Étudier la convexité de s .

9. À l'aide d'un tableau de valeurs sur votre calculatrice, dessiner $\mathscr{C}_s$ sur le graphique ci-dessous.

10. Effectuer des recherches sur la fonction **sigmoïde**.

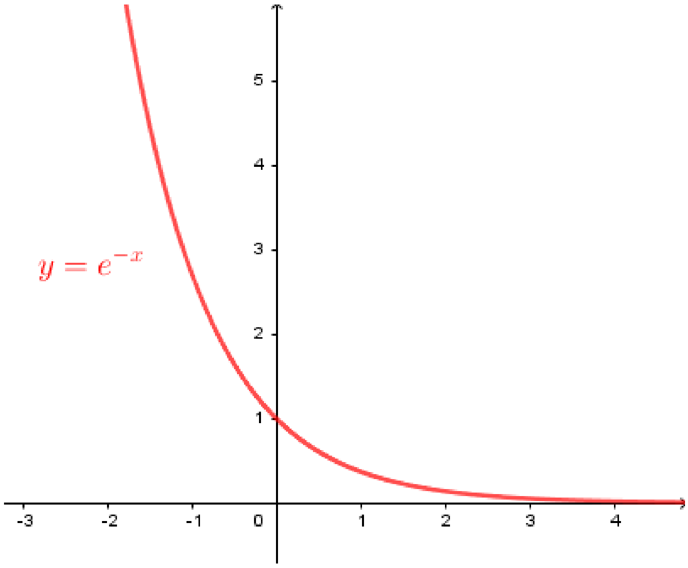


Corrigé

1. .

2. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est définie, strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Rappel de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$:



Ainsi, La fonction $x \longmapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Par quotient, s est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc continue sur $\mathbb{R}$).

3. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \geq 0$ et
- $1+\mathrm{e}^{-x} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leq 1$.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$.

Par inverse (ou quotient), $\lim\limits_{x \to -\infty} s(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = 1$.

5. **Bonus :** Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Montrons que $s(x) < s(y)$.

$$
\begin{array}{lrcll}
 & x & < & y & \\
\Leftrightarrow & -x & > & -y & \textit{(opposés)} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{-x} & > & \mathrm{e}^{-y} \quad > 0 & (x \longmapsto \mathrm{e}^{x} \textit{ est strictement croissante et positive sur } \mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow & 1+\mathrm{e}^{-x} & > & 1+\mathrm{e}^{-y} \quad > 0 & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} & < & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}} & \textit{(inverses de deux nombres strictement positifs)}
\end{array}
$$

Ainsi s conserve strictement l'ordre.

6. $s(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 1$, $u'(x) = 0$, $v(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ (dérivée composée).

Ainsi, $s'(x) = \dfrac{0 \times (1+\mathrm{e}^{-x}) - 1 \times (-\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

De plus, $s(x)(1-s(x)) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \times \left(1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \times \left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = s'(x)$.

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s'(x) > 0$ par quotient de deux fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$.

s est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $s'(x)$	+	
Var de s	0 ↗	1

8. $s'(x)=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $u'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ (dérivée composée), $v(x)=(1+\mathrm{e}^{-x})^2$ et $v'(x)=-2\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})$ (dérivée de $f^2=2f'f$).

Ainsi, $s''(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\times(1+\mathrm{e}^{-x})^2-\mathrm{e}^{-x}\times(-2\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x}))}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\times(1+\mathrm{e}^{-x})^2+2(\mathrm{e}^{-x})^2(1+\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}$.

En factorisant, $s''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})\,(-(1+\mathrm{e}^{-x})+2\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}$.

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

- $\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})>0$ par produit de deux fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$
- $(1+\mathrm{e}^{-x})^4>0$.

Le signe de $s''(x)$ correspond donc au signe de $\mathrm{e}^{-x}-1$.

$\mathrm{e}^{-x}-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{-x}>1 \quad\Leftrightarrow\quad x<0$.

s est donc convexe sur $]-\infty\,;0]$ et concave sur $[0\,;+\infty[$. $\mathscr{C}_s$ possède un point d'inflexion en 0.

9.