Aire de baignade

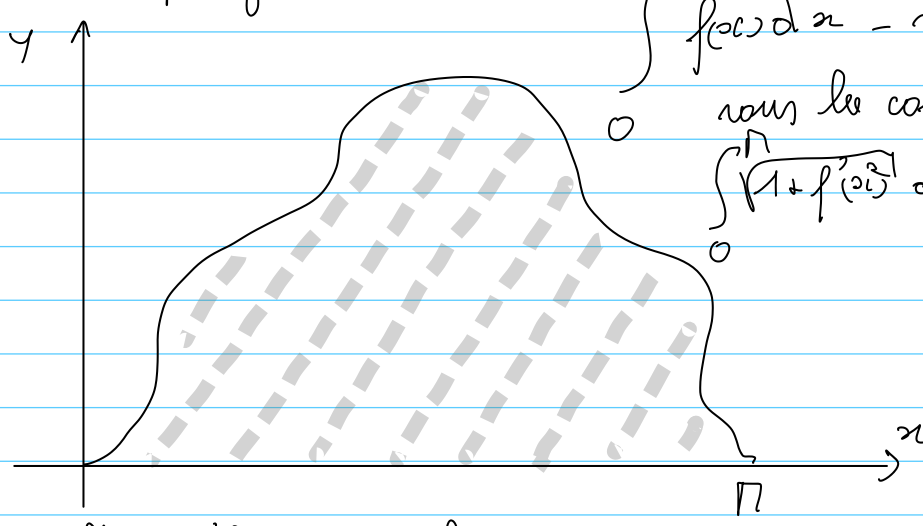
Données de l'énoncé :

- 120 enfants
- ligne d'eau de 25 m
- contraintes légales : 3 personnes pour 2 m² soit 1,5 personne/m²

Modélisation mathématique

La ligne d'eau délimite une surface d'eau qui doit être maximale, cette ligne pouvant être assimilé à une courbe de fonction mathématique.

Dans le cas le plus général :



$\int_0^n f(x)\,dx$ maximale

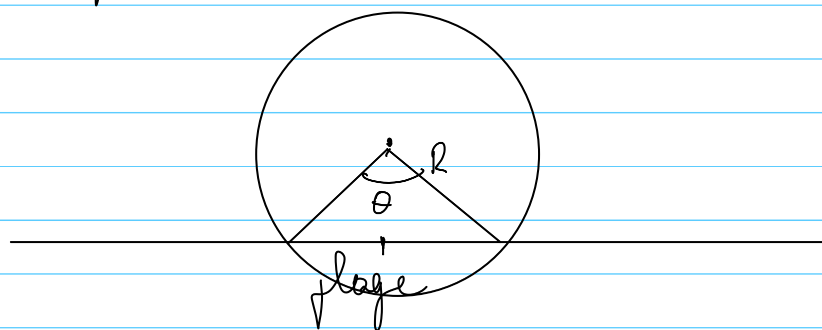
sous la contrainte

$\int_0^n \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 25$

Dans le cas d'une étude en classe, cette première approche est sûrement trop générale.

Une simplification peut être opéré en se ramenant à des considérations géométriques.

L'inégalité isopérimétrique $4\pi S \leq p^2$ (pour une figure fermée) étant optimale pour le disque, on peut imaginer la forme suivante :



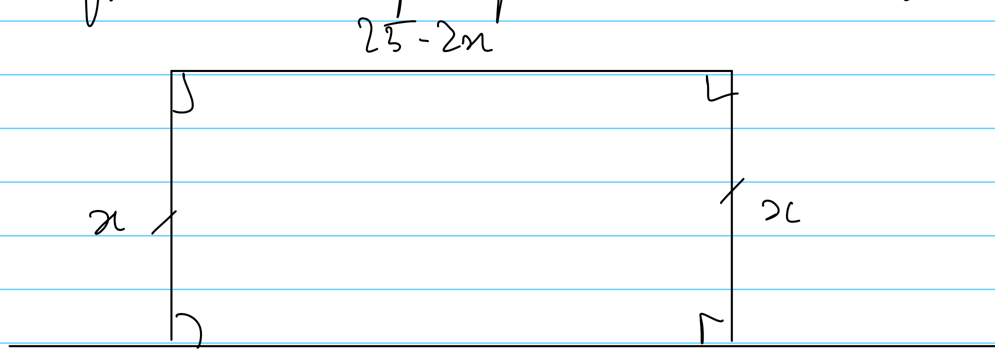
$2\pi R - \theta R = 25$ donc $R = \dfrac{25}{2\pi - \theta}$

$\mathcal{A}(\theta) = \pi R^2 - \dfrac{R^2\theta}{2} + R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = R^2\left(\pi - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$\rightsquigarrow$ à finir d'étudier mais optimale pour $\theta = \pi$? à voir

$\rightarrow$ demi-cercle $-$ $\mathcal{A} = \left(\dfrac{25}{\pi}\right)^2 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{625}{2\pi} = 99,47$

Dernière hypothèse classique : forme d'un rectangle



$\mathcal{A}(x) = x(25-2x)$

$\rightarrow$ optimale pour $x = \dfrac{25}{4}$ $\mathcal{A}\left(\dfrac{25}{4}\right) = 78,125$

Dans le cas du demi-disque, la densité légale est respectée : 120 / 99,47 ≃ 1,20 tandis que pour le rectangle, ce n'est pas le cas : 120 / 78,125 = 1,53.

→ Discussion sur le retour au réel : maintenir une forme circulaire dans un plan d'eau ?!

→ confrontation du modèle aux contraintes réelles.