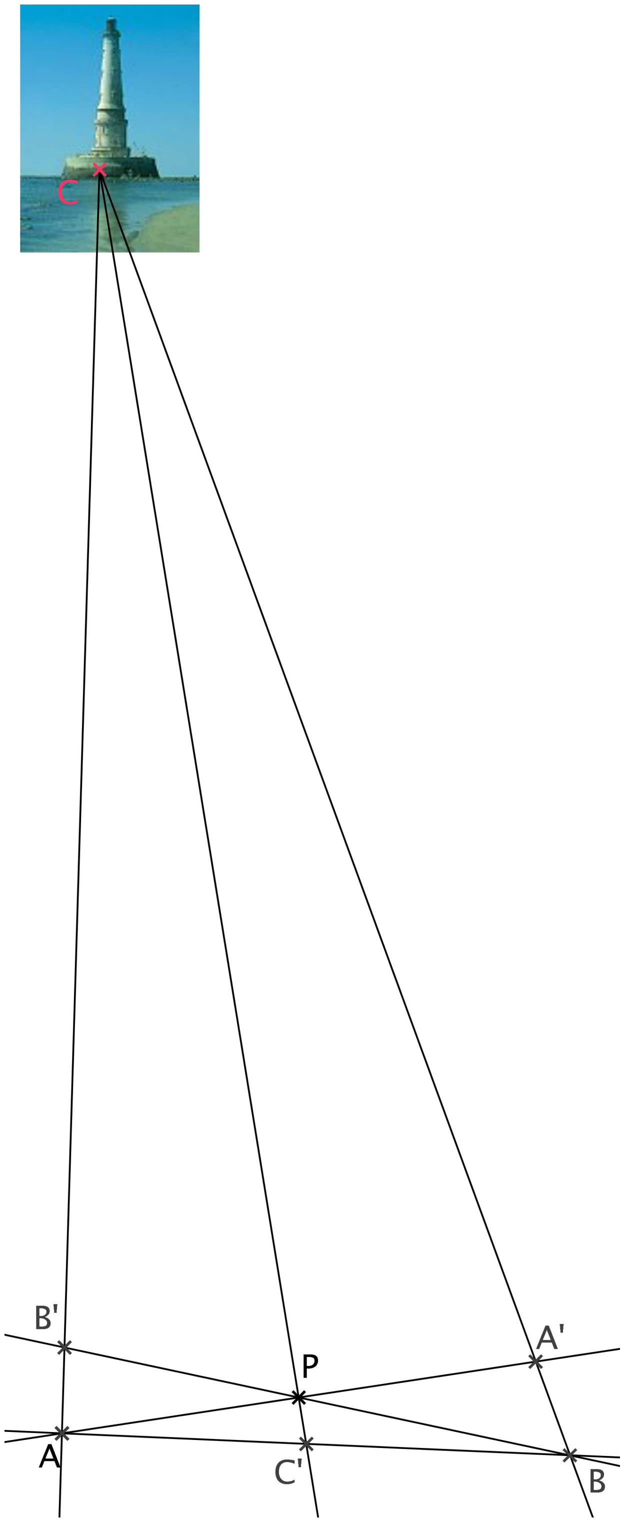
1 ÉNONCÉ



Devoir de vacances : de la plage de la Palmyre en Charente-Maritime on peut observer le plus vieux phare du monde en activité. Il s'agit du phare de Cordouan qui, depuis plus de 4 siècles, indique aux navigateurs, l'embouchure de la Gironde et certains bancs de rochers dangereux. Mais à quelle distance de la plage peut bien se situer ce phare ? Pour répondre à cette question on a donc placé sur la plage à marée basse, les sommets d'un quadrilatère $ABA'B'$, tel que le phare de Cordouan en C soit aligné avec A et B'. Nous avions décidé d'emblée que les diagonales du quadrilatère se coupeRaient en P, là où se situait le parasol de mon beau-frère Marcel qui se lamentait de ne pouvoir faire voler son cerf-volant en l'absence de vent ! La longueur l du cordage du cerf-volant sus-indiqué nous a permis de placer A, A' et B' tels que : $PA = PA' = PB' = l$. Il a fallu avancer jusqu'en B dans l'alignement de P et B' pour que B soit aligné avec A' et le phare situé en C. Sur la droite (AB) on a pu déterminer le point C' aligné avec P et C. On a pris les mesures suivantes en mètres :

$$l = 150 \qquad ; \qquad PB = l + 5 \qquad ; \qquad PC' = \frac{l}{2}$$

Mon beau-frére Marcel n' a jamais été convaincu de ma démonstration qui lui prouvait que ce phare était éloigné de plus de 9 km, qu'en pensez vous ?

Indication : une solution possible est de démontrer le résultat suivant avant de l'appliquer.

Étant donné un triangle ABC quelconque et un point P à l'intérieur tel que :

- (AP) coupe $[BC]$ en A'.
- (BP) coupe $[AC]$ en B'.
- (CP) coupe $[AB]$ en C'.

alors, quel que soit P on a l'égalité :

$$\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 2$$

Cette figure ne sert qu'à illustrer l'énoncé et ses dimensions sont fictives.

2 SOLUTION

2.1 $1^{\text{ère}}$solution

L'égalité à démontrer serait évidente si P était le centre de gravité du triangle, car chacune des fractions est égale à $\frac{2}{3}$.

Si P est le barycentre de (A, m_1) , (B, m_2) et (C, m_3), (AP) coupe (BC) au point A' qui est donc le barycentre partiel de (B, m_2) et (C, m_3), on a donc :

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{AP} = m_2\overrightarrow{AB} + m_3\overrightarrow{AC} = (m_2 + m_3)\overrightarrow{AA'}$$

Remarque : un élève de première n'est pas sensé savoir que tout point du plan admet des coordonnées barycentriques par rapport à 3 points non alignés, mais il peut procéder par construction partielle en choisissant d'abord $m_2 = A'C$ et $m_3 = A'B$, puis en choisissant m_1 pour que P soit barycentre de (A, m_1) et de $(A', m_2 + m_3)$.

En considérant que B' est barycentre partiel de (A, m_1) et (C, m_3) on montre de même que

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{BP} = m_1\overrightarrow{BA} + m_3\overrightarrow{BC} = (m_1 + m_3)\overrightarrow{BB'}$$

En considérant que C' est barycentre partiel de (A, m_1) et (B, m_2) on montre de même que

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{CP} = m_1\overrightarrow{CA} + m_2\overrightarrow{CB} = (m_1 + m2)\overrightarrow{CC'}$$

Le point P étant à l'intérieur du triangle, on peut supposer que les masses m_i sont positives. On a donc : $\frac{AP}{AA'} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $\frac{BP}{BB'} = \frac{m_1 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$ et $\frac{CP}{CA'} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}$

On en déduit que $\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{2(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} = 2$

Appliquons ce résultat dans le cas où : $PA = PB' = PA' = 150$, $PB = 155$ et $PC' = 75$, posons $PC = x$, on a donc l'équation :

$$\frac{150}{300} + \frac{155}{305} + \frac{x}{x+75} = 2$$

équivalente à :

$$\frac{x}{x+75} = \frac{244 - 61 - 62}{122}$$
$$\frac{x}{x+75} = \frac{121}{122}$$
$$122x = 121x + 9075$$
$$x = 9075$$

Le phare est donc situé à 9,075 km du parasol.

Si $PB \geqslant l + 5 + \epsilon$ le phare est à moins de 9km : à vous de chercher $\epsilon \in \mathbb{R}^+$!

2.2 2^{e}solution

Considérons la parallèle à (AB) passant par P, et ses points d'intersection X et Y avec respectivement (CA) et (CB).

On $\frac{A'P}{A'A} + \frac{B'P}{B'B} = \frac{XP}{AB} + \frac{YP}{AB} = \frac{XY}{AB} = \frac{CP}{CC'}$

Appliquons ce résultat dans le cas où : $PA = PB' = PA' = 150$, $PB = 155$ et $PC' = 75$, posons $PC = x$, on a donc l'équation :

$$\frac{150}{300} + \frac{150}{305} = \frac{x}{x+75}$$

Qui aboutit à la solution $x = 9075$.

Si on augmente PB de 5 cm, l'équation : $\frac{1}{2} + \frac{150}{305,05} = \frac{x}{x+75}$ aboutirait à une solution inférieure à 9000. D'où la méfiance de mon beuu-frère, peut-être ?