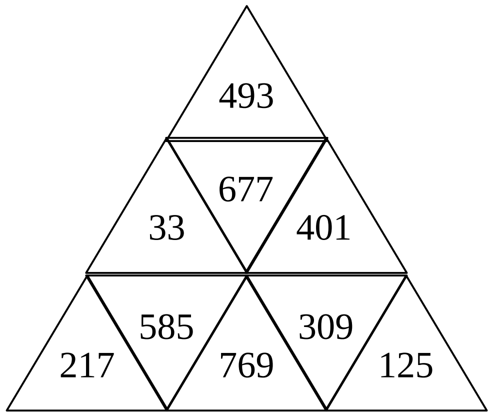
Les triangles magiques.

Pour l’anniversaire des 92 ans de Mémé en 2005, un ami magicien lui a envoyé ce cadeau :

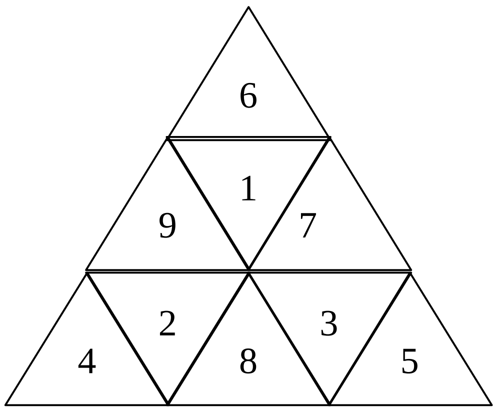


Il s’agit d’un triangle magique :

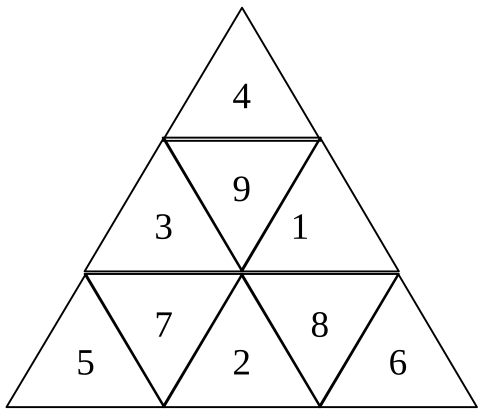
- sur les bordures de chacun des trois côtés, la somme des cinq nombres est 2005
- les nombres utilisés vont de 92 en 92.
- les cinq nombres soulignés formant une couronne ont aussi pour somme 2005 (585+33+677+401+309 = 2005).

1°) Prenons les nombres de 1 à 9 (donc de 1 en 1) à répartir dans les neuf cases de triangles magiques. Quelles sommes magiques différentes peut-on obtenir, en respectant la règle des trois totaux identiques de cinq nombres, ainsi que la règle du même total en couronne ?

Voici deux triangles possibles, l’un de somme 22, l’autre de somme 28.

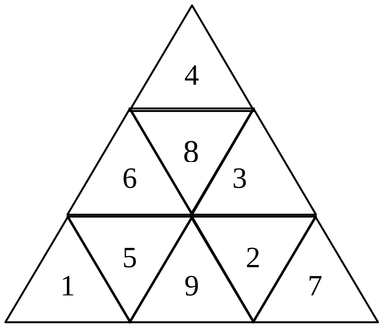


Somme 22

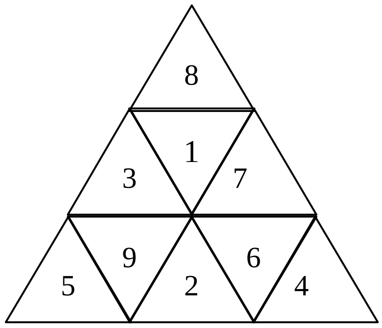


Somme 28

a) Pourquoi ne peut-on obtenir de somme inférieure à 22 ou supérieure à 28 ?
b) Les sommes magiques possibles avec les nombres de 1 à 9 sont 22, 24, 25, 26, 28.
On admet qu’on ne peut obtenir les sommes 23 ou 27. Voici les triangles 24 et 26 :



Somme 24



Somme 26

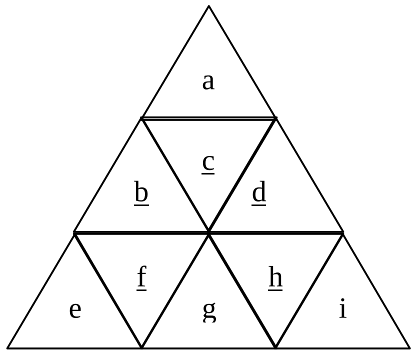
Donner un triangle magique de somme 25.

2°) En vous aidant des exemples précédents, construisez un triangle magique de somme 2006 utilisant des nombres allant de 93 en 93 pour le prochain anniversaire de Mémé.

3°) Aurait-on pu souhaiter l’anniversaire des 90 ans en 2003 ?

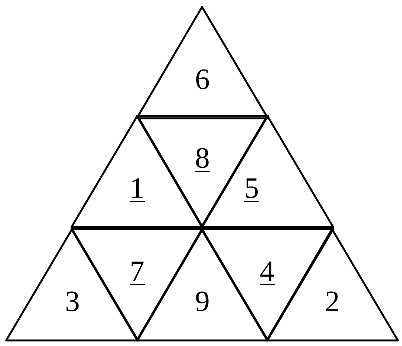
Solution :

1°) Donnons un nom aux neuf nombres à placer.



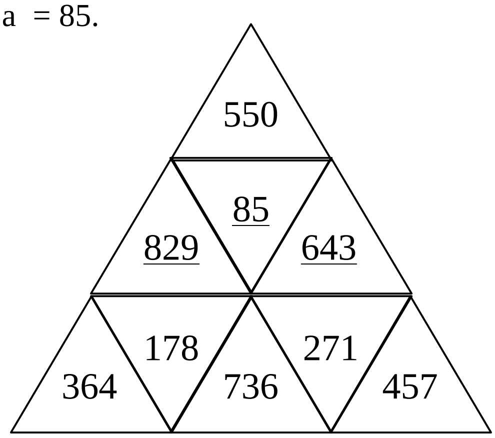
En tournant autour du triangle on peut obtenir trois fois la somme magique, en utilisant les notations ci-dessus on obtient alors 2a+2c+2e+2f+2h+2i + b+d+g, soit deux fois la somme des neuf nombres de 1 à 9 (soit 2x45) diminuée du total des nombres (b+d+g). La somme magique vaut donc 30 –(b+d+g)/3.

Comme b, d, g sont des nombres différents leur minimum est 1+2+3 = 6, et leur maximum est 7+8+9 = 24. On obtient une somme magique minimum de 30-8 = 22 et une somme magique maximum de 30-2 = 28.



somme 25

2°) Pour 2006, comment construire un triangle avec des nombres allant de 93 en 93 ?
Soit a le plus petit des neuf nombres à utiliser.
En copiant le triangle magique de somme 22 = 1+2+4+6+9 où les nombres vont de 1 en 1 à partir de 1, on peut imaginer un triangle où les nombres vont de 93 en 93 à partir de a, dont la somme est : a+(a+93)+(a+3x93)+(a+5x93)+(a+8x93)= 5a + 17x93 = 5a +1581.
On obtient 5a +1581 = 2006, 5a = 425 d'où a = 85.



3°) Comment construire un triangle de somme 2003 avec des nombres allant de 90 en 90 ?
Soit a le plus petit des neuf nombres à utiliser.
En copiant le triangle magique de somme 22 = 1+2+4+6+9 où les nombres vont de 1 en 1 à partir de 1, on peut imaginer un triangle où les nombres vont de 90 en 90 à partir de a, dont la somme est : a+(a+90)+(a+3x90)+(a+5x90)+(a+8x90)= 5a + 17x90 = 5a +1530.
On obtient 5a +1530 = 2003, 5a = 473 ce qui est impossible avec a entier.
En copiant le triangle magique de somme 24 = 1+4+5+6+8, on imagine une somme de
2003 = a+(a+3x90)+(a+4x90)+(a+5x90)+(a+7x90)= 5a + 19x90 = 5a + 1710 d'où 5a = 293 qui n'a pas de solution. On peut continuer sur les modèles 25, 26, ou 28, on échoue.
La somme de cinq nombres formant la somme magique est de la forme (5a + 90 k).
Si la somme magique cherchée est 2003, il n'y a pas de solution car 5a ne peut finir par 3.
Il n'y a pas eu de souhait d'anniversaire en 2003…