Bonjour,

Énoncé :

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant :
pour tout réel x , on a :

$$f(8x)+f(18x)= 2f(12x) \text{ et } f(0)=2014$$

Solution :

D'après cette équation, $f(12x)$ est la moyenne de $f(8x)$ et $f(18x)$. On pose
 $a=f(12x)-f(8x)=f(18x)-f(12x)$

On peut donc transformer l'équation fonctionnelle $f(8x)+f(18x)= 2f(12x)$
en $f(1.5^n x)=f(x)+na$.

Si $a>0$, la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement
croissante sur $]0;+\infty[$.

Si $a<0$, la fonction est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement
décroissante sur $]0;+\infty[$.

Si $a=0$, la fonction est constante soit $f(x)=2014$.

On va étudier la limite de la fonction quand x tend vers 0 avec a non nul
et x positif dans un premier temps (cela suffit à démontrer que ces
fonctions ne sont pas solutions ; on pourra recommencer avec x négatif).

Soit $f(k)=y$. Il existe un nombre b tel que $1,5^n b=k$. Ainsi, lorsque n tend
vers $+\infty$, on a b qui tend vers 0, or $f(b)=f(k)-na$.

$$\text{Avec } a>0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -na = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(k) - na = -\infty$$

$$\text{Avec } a<0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -na = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(k) - na = +\infty$$

Ainsi, si a non nul, $\lim_{b \rightarrow 0, b>0} f(b) \neq f(0)$ donc les fonctions avec a non nul ne
sont pas continues en 0 : elles ne sont pas solutions.

Dans le cas où $a=0$, on a $f(x)=2014$, unique solution.