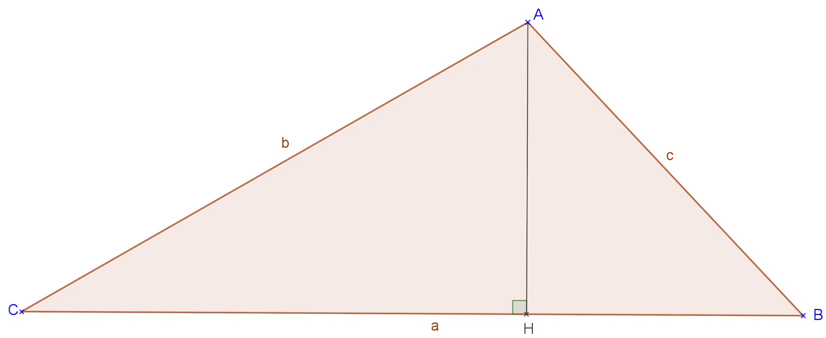
PROBLEME DE LA QUINZAINE 4

Les outils ne devant pas dépasser ceux du collège, nous prendrons le soin de redémontrer préalablement de façon élémentaire quelques résultats classiques sur lesquels nous nous appuierons pour répondre au problème. Ceux-ci sont essentiellement basés sur la trigonométrie, et plus particulièrement sur les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle et sur l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Préliminaires

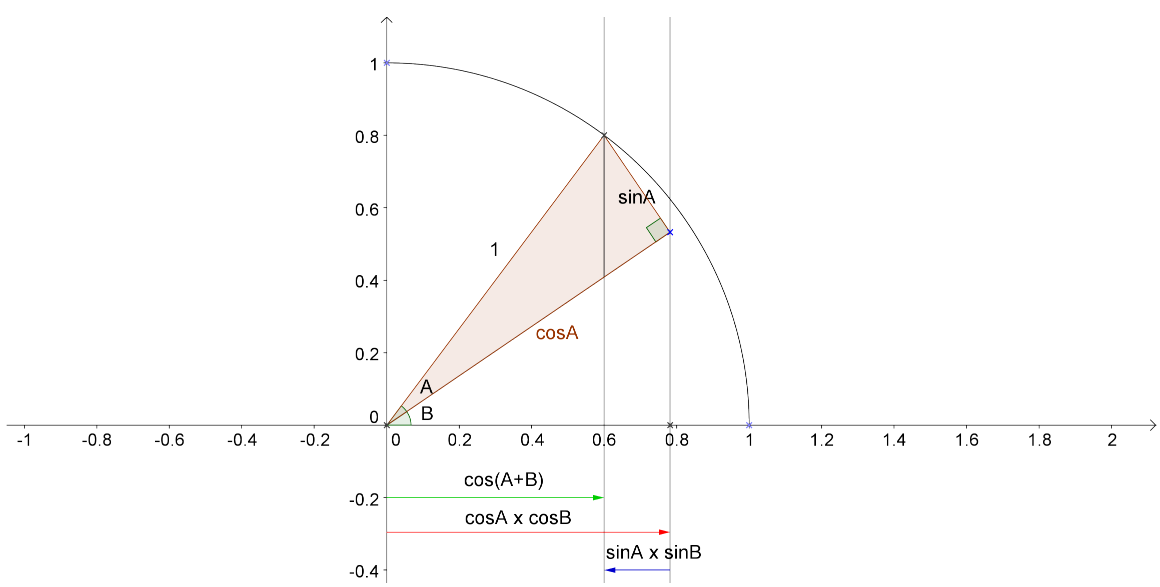
Soit un triangle ABC quelconque tel que $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.
Soit H le pied de la hauteur issu de A.



- ***Préliminaire 1***
  On a $\mathcal{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2} \times a \times AH$. Or $AH = c \times \sin \hat{B}$ d'où $\mathcal{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin \hat{B}$ (1)
  On remarquera que le fait que la position du point H puisse être extérieure au segment $[BC]$ ne change pas le résultat dans la mesure où $\sin x = \sin(\pi - x)$. De même les rôles de a, b et c étant symétriques, on a également $\mathcal{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \hat{A}$ et $\mathcal{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \hat{C}$

- ***Préliminaire 2***
  Dans le triangle AHB rectangle en H d'après le théorème de Pythagore on a $AB^2 = AH^2 + HB^2$ d'où $c^2 = (b \times \sin \hat{C})^2 + (a - b \times \cos \hat{C})^2$ et finalement $\cos \hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$(2).(*Il s'agit de la formule d'Al Kashi*).
  A nouveau on remarquera que le cas d'un triangle obtusangle ne change rien au résultat dans la mesure où $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
  Par ailleurs, les rôles de a,b et c étant symétriques, on a également $\cos \hat{B} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$ et $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

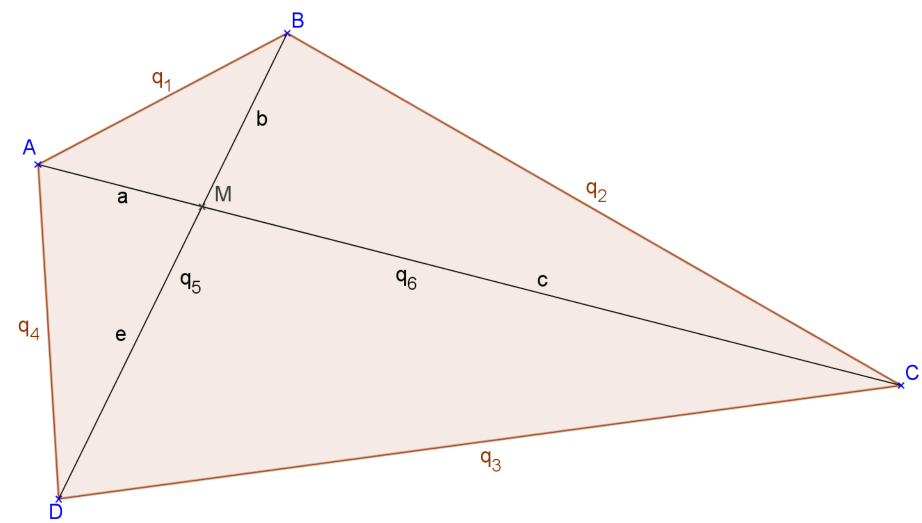
- ***Préliminaire 3***
  L'application directe des définitions de cosinus et sinus dans les triangles rectangles de la figure ci-dessous nous assure que $\cos(A + B) = \cos A \times \cos B - \sin A \times \sin B$(3)



Le problème

- ***L'énoncé***
  Pourriez-vous montrer avec des outils ne dépassant pas ceux du collège que : *Tout quadrilatère convexe à côtés et diagonales rationnels est partagé par ses diagonales en quatre triangles à côtés rationnels* (Kummer 1848).

- ***Une solution***
  Considérons le quadrilatère convexe ci-dessous avec $q_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in [1;6]$.
  Notons également $\mathcal{S}_1$,$\mathcal{S}_2$,$\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ les aires respectives des triangles ABM, MBC, MCD et MDA.



D'après (2), il vient que $\cos A\hat{B}C$, $\cos A\hat{B}M$ et $\cos M\hat{B}C$ sont, parmi d'autres, tous rationnels. Par suite, d'après (3), on en déduit que le produit $\sin A\hat{B}M \times \sin M\hat{B}C = \cos A\hat{B}C - \cos A\hat{B}M \times \cos M\hat{B}C$ est lui aussi rationnel. Par ailleurs, les deux triangles ABM et MBC ayant la hauteur issue du point B en commun, il est clair que $\frac{a}{c} = \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}$. Or d'après (1), on a $\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} = \frac{\frac{1}{2}\times q_1 \times b \times \sin A\hat{B}M}{\frac{1}{2}\times q_2 \times b \times \sin M\hat{B}C}$ ainsi $\frac{a}{c} = \frac{q_1 \times \sin A\hat{B}M}{q_2 \times \sin M\hat{B}C}$.
Comme de plus il est clair que $\sin M\hat{B}C \neq 0$, on en déduit que $\frac{a}{c} = \frac{q_1 \times \sin A\hat{B}M \times \sin M\hat{B}C}{q_2 \times \sin^2 M\hat{B}C}$.
En outre, $\sin^2 M\hat{B}C \in \mathbb{Q}$ puisque $\sin^2 M\hat{B}C = 1 - \cos^2 M\hat{B}C$ et que $\cos M\hat{B}C \in \mathbb{Q}$.
Finalement, on a: $\begin{cases} a + c = q_6 \in \mathbb{Q} \\ \frac{a}{c} = q \in \mathbb{Q} \end{cases}$
Il est donc immédiat que $(a;c) \in \mathbb{Q}^2$.
De manière analogue, on montre que $(b;d) \in \mathbb{Q}^2$.
Conclusion: Le quadrilatère $ABCD$ est partagé en quatre triangles à côtés rationnels.