Énoncé du problème

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^{*+}$: $x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4,\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1\ , \dots ,\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4,\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1$

Solution

Les deux premières égalités peuvent s'écrire : $x_2 = f(x_1)$ et $x_3 = g(x_2)$, où f et g sont les fonctions homographiques : $f : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{-x+4} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{-x+1} \end{array}$. Le produit matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ permet d'écrire que $g \circ f$ est la fonction homographique $h : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-x+4}{-x+3} \end{array}$. On a donc l'égalité : $x_3 = h(x_1)$, et l'enchainement d'égalités proposé dans l'énoncé de ce problème peut donc s'écrire $x_{2n+1} = h(x_{2n-1})$ pour $n \in [1\,;100] \cap \mathbb{N}$ et $x_{101} = x_1$. La suite (x_{2n+1}) pour $n \in [0\,;50] \cap \mathbb{N}$ est donc une suite récurrente homographique de premier terme x_1, telle que $x_{101} = h^{50}(x_0)$ [1].

L'étude de cette suite homographique peut se ramener à l'étude d'une suite arithmétique car la matrice de h n'est pas diagonalisable. Elle est seulement trigonalisable, car elle admet pour seule valeur propre 1, racine du polynôme caratéristique $(-1-\mathrm{X})(3-\mathrm{X})+4 = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}+1$. Nous sommes donc amené à la trigonalisation suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut donc poser $x_{101} = h^{50}(x_0) = \mathrm{F} \circ \mathrm{H}^{50} \circ \mathrm{F}^{-1}(x_1)$ où F et H sont les fonctions homographiques de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans le cas où la matrice de H est triangulaire avec une seule valeur propre, $(\mathrm{H}^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définit une suite arithmétique telle que $\mathrm{H}^n(x) = x+n$. La matrice de H^n est donc $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que la matrice de h^{50} est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99 & 200 \\ -50 & 101 \end{pmatrix}$$

On doit donc avoir l'égalité $x_{101} = x_1 = \dfrac{-99x_1+200}{-50x_1+101}$; ce qui nous ramène l'équation $-50x_1^2 + 200x_1 - 200 = -50(x_1-2)^2 = 0$ dont 2 est la seule solution. La seule et unique solution de notre système est donc :

$$\boxed{x_{2n+1} = 2 \text{ et } x_{2n} = \frac{1}{2} \text{ pour } n \in [0\,;50] \cap \mathbb{N}}$$

1. $h^{50}(x)$ désigne ici $\underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{\text{50 itérations de } h}(x)$ à ne pas confondre avec $[h(x)]^{50}$