Corrigé du sujet n° 14

Première méthode

Je considère $M_0, M_1 ... M_{2n}, 2n+1$ points situés sur le polygone régulier. Choisir 3 sommets parmi ces $2n+1$ points pour former un triangle, revient à faire une combinaison de 3 points parmi $2n+1$, donc le nombre de cas possibles est : $\binom{2n+1}{3}$.

Il me reste à déterminer le nombre de cas favorables, pour cela, je vais choisir un point parmi les $2n+1$ points, j'ai donc $2n+1$ possibilités pour le choisir : je fixe par exemple le point M_0, je peux toujours m'arranger pour choisir 2 points qui restent pour compléter mon triangle parmi n points qui se trouvent du côté du point M_0 de telle sorte que le triangle formé ne contienne pas l'origine.Par exemple $M_0M_2M_4$, ceci est toujours possible, car notre polygone est régulier (il y a une symétrie par rapport à la droite (OM_0)). Donc je dois choisir 2 points parmi n points, ce qui donne comme nombre de cas $\binom{n}{2}$, puis pour finir, le nombre de cas possibles est : $(2n+1)\binom{n}{2}$.

Donc la probabilité d'avoir un triangle qui ne contient pas l'origine est $\dfrac{(2n+1)\binom{n}{2}}{\binom{2n+1}{3}}$.

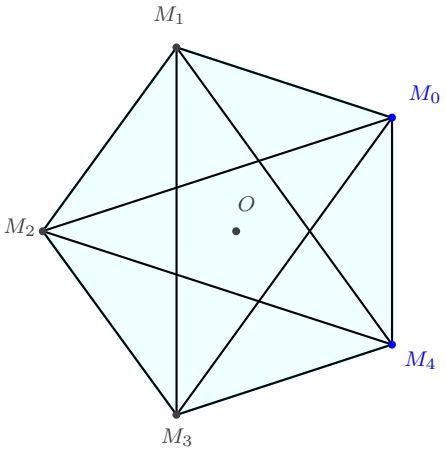
La probabilité d'avoir un triangle qui contient l'origine est : $1 - \dfrac{(2n+1)\binom{n}{2}}{\binom{2n+1}{3}} = \dfrac{n+1}{4n-2}$.

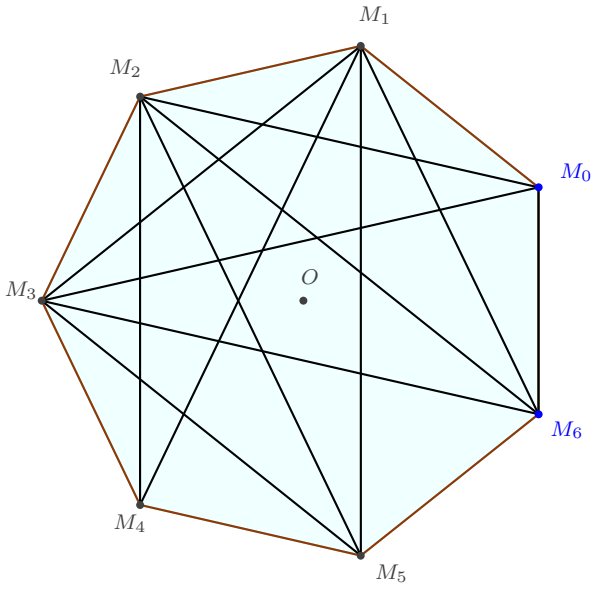
Deuxième méthode

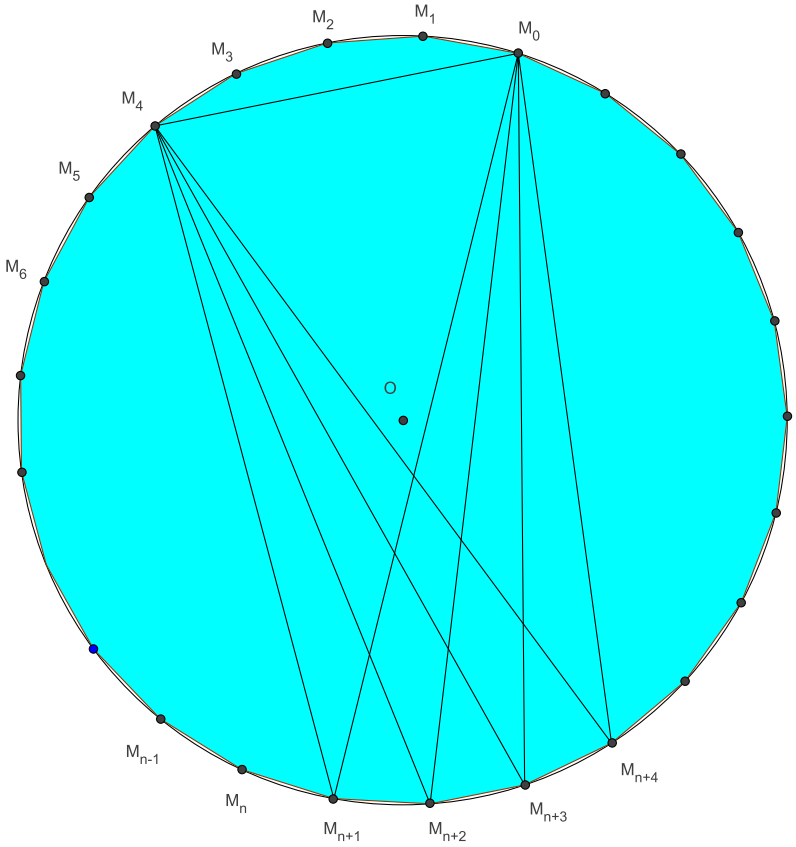
Cette fois-ci, je procède directement sans utiliser l'évènement contraire. Je fixe M_0 par exemple, il me reste à choisir 2 points parmi les $2n$ points restants, donc le nombre de cas possibles est $\binom{2n}{2}$. Pour finir il me reste à déterminer le nombre de cas favorables, pour cela, je vais choisir deux points au hasard parmi les n points pour former un triangle contenant le centre du polygone. Si par exemple je choisis le point M_i $1 \leqslant i \leqslant n$, il y aura i triangles qui contiennent le centre. Par exemple si $i = 4$, alors j'aurai 4 triangles : $M_0M_4M_{n+1}$, $M_0M_4M_{n+2}$, $M_0M_4M_{n+3}$, $M_0M_4M_{n+4}$, comme le montre la figure ci-dessous.

Le nombre de cas favorables est : $\sum_{i=0}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$, donc la probabilité cherchée est :

$\dfrac{n(n+1)}{2 \times \binom{2n}{2}} = \dfrac{n+1}{4n-2}$.


M_1
M_0
O
M_2
M_4
M_3


M_1
M_2
M_0
M_3
O
M_6
M_4
M_5


M_2
M_1
M_0
M_3
M_4
M_5
M_6
O
M_{n-1}
M_n
M_{n+1}
M_{n+2}
M_{n+3}
M_{n+4}