Corrigé du sujet n° 13

$$\begin{aligned} 2n+2001 \leqslant f(f(n))+f(n) \leqslant 2n+2002 &\Leftrightarrow 2001 \leqslant f(f(n))+f(n)-2n \leqslant 2002 \\ &\Leftrightarrow 2001 \leqslant f(f(n))-f(n)+2(f(n)-n) \leqslant 2002 \end{aligned}$$

Je pose $g(n)=f(n)-n$, l'inégalité précédente devient $2001 \leqslant g(f(n))+2g(n) \leqslant 2002$ (1).
Comme $f(n) \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, j'ai donc $g(n) \in \mathbb{Z}^*$, car si $g(n_0)=0$ pour un entier naturel n_0, alors $2001 \leqslant 0 \leqslant 2002$, ce qui est absurde. Je dois montrer maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai $f(n)>n$, pour cela, je vais raisonner par l'absurde.
Je suppose qu'il existe un un entier naturel m tel que $f(m) \leqslant m$.
Je pose $p=f(m)$ et $q=f(p)$, j'ai donc d'une part :
$2m+2001 \leqslant p+q \leqslant 2m+2002$, d'autre part $2p+2001 \leqslant f(q)+q \leqslant 2p+2002$, ce qui donne $2p+2002 \geqslant f(q)+2m+2001-p$, soit $3p+1-2m \geqslant f(q)$, comme $p<m$ (le cas de l'égalité a été écarté précédemment), j'ai donc $f(q) \leqslant 3p-2m+1 \leqslant p<m<q$, ce qui est absurde, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, j'ai $f(n)>n$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n)>0$.
Je considère deux entiers naturels l et h, tels que $h=f(l)$, puis j'utilise la relation (1) qui donne :
$2001 \leqslant g(h)+2g(l) \leqslant 2002$ et $2001 \leqslant g(f(h))+2g(h) \leqslant 2002$ ou $4002 \leqslant 2g(h)+4g(l) \leqslant 4004$ et $2001 \leqslant g(f(h))+2g(h) \leqslant 2002$, d'où $4g(l) \geqslant 2000+g(f(h)) \geqslant 2000+g(l)$, donc $g(l) \geqslant 667$.
Comme l est quelconque, j'ai aussi $2001 \leqslant 2g(l)+g(f(l)) \leqslant 2002$, cette dernière double inégalité ne reste vraie pour tout $l \in \mathbb{N}$ que si la fonction g est constante, ce qui conduit à $g(n)=667$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $f(n)=n+667$.