Corrigé du sujet n° 8

Première solution
En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n}$$

On obtient : $\sqrt[4]{A_1 A_2 A_3 A_4} \leqslant \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$ et $\sqrt[4]{h_1 h_2 h_3 h_4} \leqslant \dfrac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}$.
En multipliant membre à membre les inégalités précédentes, on a :

$$\sqrt[4]{h_1 A_1 \times h_2 A_2 \times h_3 A_3 \times h_4 A_4} \leqslant \frac{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)}{16}.$$

Or $V = \dfrac{A_i h_i}{3}$, ou $A_i h_i = 3V$, d'où $48V \leqslant (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$.

Si le tétraèdre est régulier alors l'inégalité précédente devient une égalité, ce qui nous donne $k = 48$.

Deuxième solution
On peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Troisième solution
On peut utiliser l'inégalité arithmético-harmonique (voir la solution de Frédéric De Ligt).