# Corrigé du sujet n° 3

**Première méthode**
Considérons les événements suivants :

- $P_n$ : « on obtient pile au $n^{\text{ème}}$ lancer »
- $F_n$ : « on obtient face au $n^{\text{ème}}$ lancer »
- $E_n$ : « on obtient pour la première fois face suivi d'un deuxième face dans cet ordre aux lancers $n-1$ et $n$. »

On pose $u_n = P(E_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ . On a donc $u_1 = 0$ et comme les tirages sont indépendants, on a :
$u_2 = P(E_2) = P(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $u_3 = P(E_3) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
La formule des probabilités totales appliquée au système complet $(P_1; F_1)$, nous permet d'écrire :
$u_{n+2} = P(E_{n+2}) = P(P_1 \cap E_{n+2}) + P(F_1 \cap E_{n+2}) = P_{P_1}(E_{n+2}) \times P(P_1) + P_{F_1}(E_{n+2}) \times P(F_1)$.
Il nous reste à expliciter les deux termes de notre dernière somme :
$P_{F_1}(E_{n+2})$, signifie qu'on a obtenu un face au premier lancer et un pile au deuxième, il nous reste donc $n$ lancers pour réaliser la configuration « face, face » avec une probabilité $P(E_n)$, donc $P_{F_1}(E_{n+2}) = \frac{1}{2} \times u_n$, de même pour $P(P_1 \cap E_{n+2})$,signifie qu'on a obtenu pile au premier lancer, il nous reste donc $n+1$ lancers pour réaliser la configuration « face, face » avec une probabilité $P(E_{n+1})$, donc $P_{P_1}(E_{n+2}) = P(E_{n+1}) = u_{n+1}$
. La suite $(u_n)$ est une suite récurrente linéaire qui vérifie la relation : $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$.
La résolution de l'équation caratéristique et en tenant compte des conditions initiales
on obtient : $U_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n$.
Pour répondre à la question posée, il nous reste à calculer l'espérance, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} nP(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{1-\sqrt{5}}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^{n-1} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^{n-1} - \frac{\sqrt{5}}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^{n-1} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{10} \times (3+\sqrt{5})^2 - \frac{\sqrt{5}}{10} \times (3-\sqrt{5})^2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

J'ai utilisé le résultat suivant facile à démontrer $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ avec $|x| < 1$.

**Deuxième méthode**

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)u_{n+2} \ \ car\ u_1 = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} nu_{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} nu_{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} nu_{n+1} + \frac{1}{4}E + 2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)u_n + \frac{1}{4}E + 2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} nu_n - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} u_n + \frac{1}{4}E + 2 \\
&= \frac{1}{2}E - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}E + 2.
\end{aligned}$$

D'où $E = 6$