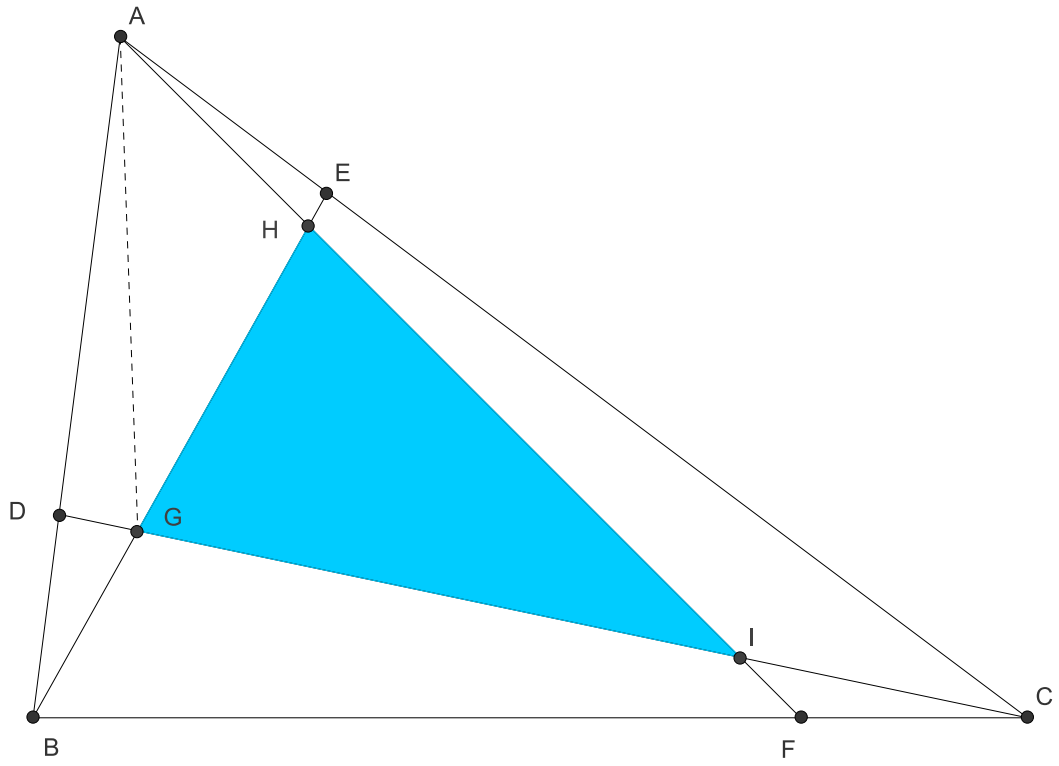
Corrigé du sujet n° 16



Dans ma figure les segments $[EB]$, $[AF]$ et $[DC]$ représentent les trois premiers coups de ciseaux que je fais pour couper le triangle, de telle sorte que j'aie :

$$\frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC} = \frac{CF}{FB} = \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

il faut maintenant que je détermine le rapport entre l'aire du triangle GHI et celle de ABC, pour ensuite répondre à la question posée.

Je dois démontrer le résultat suivant : $\dfrac{\mathcal{A}(BGA)}{\mathcal{A}(BGC)} = \alpha$

Les deux triangles AEB et BEC ont la même hauteur, donc $\dfrac{\mathcal{A}(BAE)}{\mathcal{A}(BEC)} = \dfrac{AE}{EC} = \alpha$.

De même, j'ai : $\dfrac{\mathcal{A}(GEA)}{\mathcal{A}(GEB)} = \dfrac{EA}{EC} = \alpha$, donc

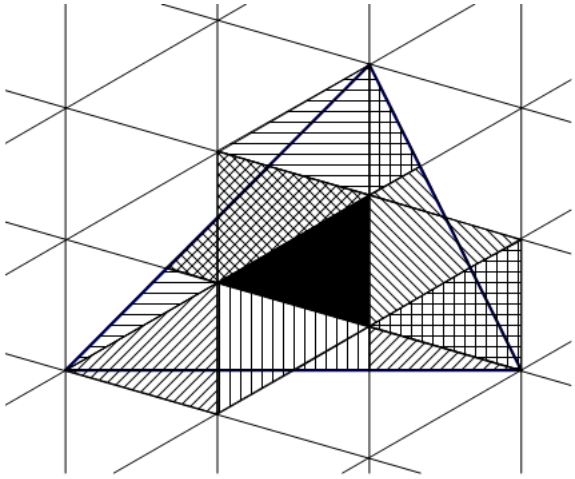
$\mathcal{A}(ABG) = \mathcal{A}(AEB) - \mathcal{A}(GAE) = \alpha\mathcal{A}(BEC) - \alpha\mathcal{A}(GEB) = \alpha\mathcal{A}(BGC)$

On démontre facilement les égalités suivantes :

$\mathcal{A}(BGC) = \dfrac{1}{\alpha}\mathcal{A}(BGA) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}\mathcal{A}(BGD) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}\mathcal{A}(BDC) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}\mathcal{A}(ABC).$

De même, on a : $\mathcal{A}(AHB) = \mathcal{A}(AIC) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}\mathcal{A}(ABC)$.

Or $\mathcal{A}(BGC) + \mathcal{A}(AHB) + \mathcal{A}(AIC) + \mathcal{A}(GHI) = \mathcal{A}(ABC)$ D'où $\dfrac{\mathcal{A}(GHI)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{1-2\alpha+\alpha^2}{\alpha^2+\alpha+1}$.

Il me reste à résoudre $\dfrac{1-2\alpha+\alpha^2}{\alpha^2+\alpha+1} = \dfrac{1}{7}$, ce qui donne $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

L'aire du triangle GHI représente un septième de celle de ABC. Pour finir, il suffit de couper aux points I, Het$G$ parallèlement aux droites $(BE), (CD)$et(AF). La figure est due à Frédéric de Ligt.