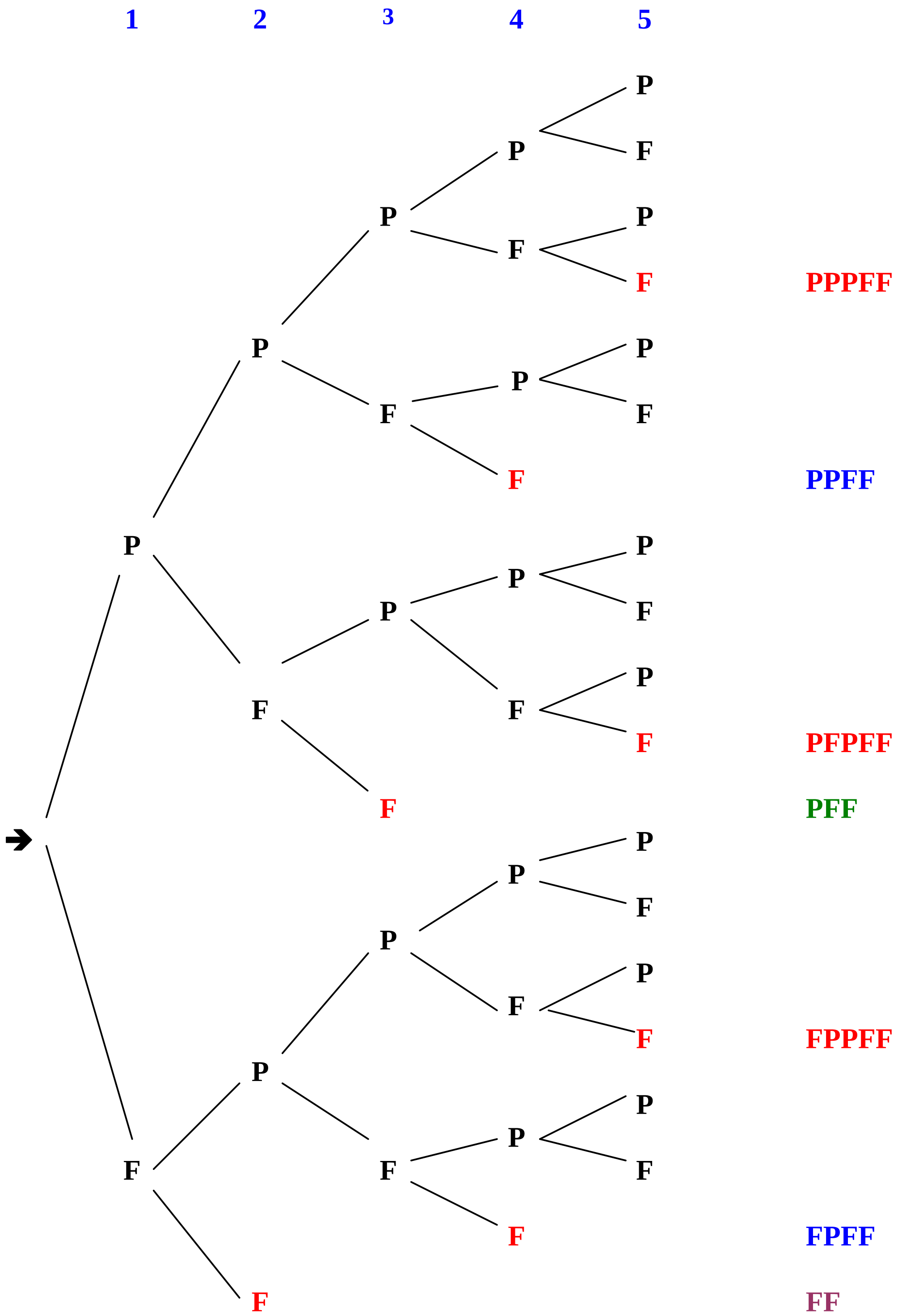
On lance une pièce parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir "Face" deux fois de suite. Combien de lancers en moyenne va-t-on effectuer ?

Naturellement, on pense à faire un arbre pondéré, la probabilité sur chaque branche étant $\frac{1}{2}$:



On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le nombre de lancers nécessaires pour obtenir « Face » deux fois de suite.

François Gonet Amiens

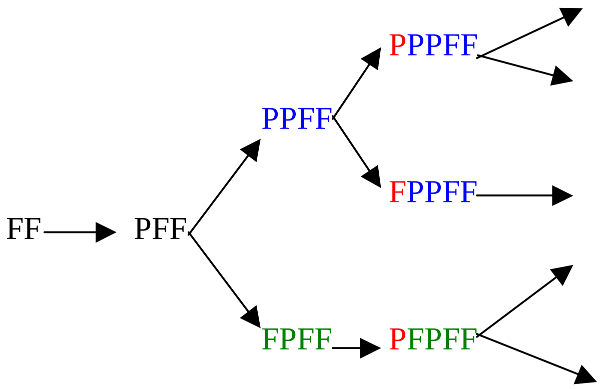
On a donc :

$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $P(X=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $P(X=5)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$

Pour continuer, il suffit de déterminer le nombre de branches de l'arbre amenant à un paquet de k éléments du type « P…PFF » ou « F…PFF» dans lequel il n'y aura pas deux fois « F » de suite, sauf à la fin bien sûr.

Cela se fait par récurrence :

k 2 3 4 5 6 7 8 9



Il est clair que :

- chaque paquet de k éléments commençant par « P » générera deux paquets de (k+1) éléments, l'un commençant par « P », l'autre par « F »
- chaque paquet de k éléments commençant par « F » générera un seul paquet de (k+1) éléments commençant nécessairement par « P »

Soit u_k le nombre de paquets de k éléments commençant par « P » et v_k le nombre de paquets de k éléments commençant par « F »

On a donc pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\begin{cases} u_{k+1} = u_k + v_k \\ v_{k+1} = u_k \end{cases}$ avec $\begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = 1 \end{cases}$

On peut donc écrire pour tout entier naturel $k \geq 2$: $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$ avec $u_2 = 0$ et $u_3 = 1$

(u_k) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 = x + 1$ qui a pour racines : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Tiens donc, le nombre d'Or !)

Ce qui donne $u_k = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ pour tout entier naturel $k \geq 2$, et compte tenu des conditions initiales $u_2 = 0$ et $u_3 = 1$ qui déterminent α et β :

$$u_k = \left(\frac{-3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Ce qui donne évidemment : $v_k = \left(\frac{-3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

Pour en revenir à notre problème de dénombrement, le nombre de paquets de k éléments du type « P…PFF » ou « F…PFF» dans lequel il n'y aura pas deux fois « F » de suite, sauf à la fin est :

$$N = \left(\frac{-3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{-3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

Ce qui se simplifie car :

$$\begin{cases} \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \\ \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \end{cases}$$

Donc $N = \frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$

<u>Enfin, la probabilité d'obtenir deux fois de suite « Face » en k lancers est</u> :

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}$$

<u>L'espérance de la variable aléatoire X est donc</u> :

$$E(X) = \frac{\sqrt{5}}{5}\times\sum_{2}^{+\infty}\left(k\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$$

$$E(X) = \frac{\sqrt{5}}{10}\times\sum_{2}^{+\infty}\left(k\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}\right)\right)$$

<u>Il reste à simplifier tout ça</u> :

En développant et en ré-indexant la quantité $(1-q)^2\times\sum_{2}^{+\infty}k.q^{k-1}$, il vient : $\sum_{2}^{+\infty}k.q^{k-1} = \frac{2q-q^2}{(1-q)^2}$

D'où : $\sum_{2}^{+\infty}k.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} = 6\sqrt{5}+13$ et $\sum_{2}^{+\infty}k.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} = 13-6\sqrt{5}$

Ce qui donne $E(X) = \frac{\sqrt{5}}{10}\times 12\sqrt{5}$ soit $\boxed{E(X)=6}$

<u>Il faut donc en moyenne six lancers pour obtenir "Face" deux fois de suite.</u>