Le problème de la quinzaine

Problème n°14

On considère un polygone régulier à 2n+1 sommets. On choisit au hasard 3 sommets distincts du polygone. En supposant l'équiprobabilité dans le choix des sommets, déterminer la probabilité pour que le centre du polygone soit à l'intérieur du triangle formé par ces trois points.

Solution

Il y a $\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$ façons de choisir 3 sommets parmi les $2n + 1$ sommets.

Parmi les triangles ainsi formés on va maintenant dénombrer ceux qui contiennent le centre du polygone.

On numérote les sommets du polygone de 0 à $2n$ dans le sens trigonométrique et on note A_k le sommet correspondant au numéro k. On note Δ_k l'axe de symétrie du polygone passant par le sommet A_k.

On fixe en A_0 le premier sommet d'un triangle contenant le centre. Pour des raisons de symétrie on va choisir le second sommet du triangle dans la liste $A_1, \ldots, A_n$. Soit A_k un de ces sommets, on trace alors l'axe Δ_k.

Il s'agit maintenant de dénombrer les troisièmes sommets compatibles avec A_0 et A_k ; ces sommets sont $A_{n+1}, \ldots, A_{n+k}$ et se trouvent compris entre les droites Δ_0 et Δ_k, ils sont donc au nombre de k. En choisissant A_0 comme premier sommet et le second sommet dans la liste $A_1, \ldots, A_n$, on trouve $1 + 2 + \ldots + k + \ldots + n$ triangles possibles, somme qui peut se factoriser sous la forme $n(n + 1)/2$. Si l'on peut maintenant choisir le second sommet dans la liste $A_1, \ldots, A_{2n}$, on trouve $n(n + 1)$ triangles possibles. Enfin il y a $2n + 1$ choix possibles pour le premier sommet.

On aboutit à un nombre total de $(2n + 1)n(n + 1)$ triangles. Mais chaque triangle a été compté 6 fois car il a été tenu compte de l'ordre dans le choix des sommets. Il y a donc $\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$ triangles contenant le centre du polygone.

Concernant la probabilité cherchée, elle vaut $\frac{(2n+1)n(n+1)}{(2n+1)2n(2n-1)} = \frac{n+1}{4n-2}$.

Cela suggère, en passant un peu rapidement à la limite, que la probabilité pour qu'un triangle, formé par trois points pris au hasard sur un cercle, contienne son centre est de ¼.