Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 8

Une inégalité tétraédrique

On sait que le volume d'un tétraèdre se calcule en prenant le tiers du produit de l'aire d'une face par la hauteur associée. On a donc $A_i = 3V/h_i$ pour i valant 1, 2, 3 ou 4.
Le premier membre de l'inégalité recherchée se modifie en :
$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = 3V(1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4)(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$.
Mais on sait que la moyenne arithmétique de *n* nombres strictement positifs est supérieure ou égale à la moyenne harmonique de ces nombres, avec une égalité seulement quand tous les nombres sont égaux. On choisit les quatre nombres h_1, h_2, h_3 et h_4. Cela donne :

$$\frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}}$$

Ou encore $(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4})(h_1+h_2+h_3+h_4) \geq 16$ avec une égalité quand $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$.

Finalement $(A_1+A_2+A_3+A_4)(h_1+h_2+h_3+h_4) \geq 48V$ avec une égalité quand $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$.
48 est bien la plus grande valeur possible.