Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 5

On va résoudre cette question plus généralement dans $\mathbb{R}$ car l'unique 100-uplet solution que l'on va obtenir aura toutes ses composantes positives.
Le système proposé est équivalent à celui-ci :

$$x_2 = \frac{1}{4-x_1},\ x_3 = \frac{1}{1-x_2},\ \ldots,\ x_{100} = \frac{1}{4-x_{99}},\ x_1 = \frac{1}{1-x_{100}}$$

On note *f*, *g* et *H* les trois fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{4-x}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$ et $H(x) = g \circ f(x) = \frac{4-x}{3-x}$.
Si $(x_1, x_2, ..., x_{99}, x_{100})$ est un 100-uplet de réels solution du système alors le 50-uplet $(x_1, x_3, ..., x_{97}, x_{99})$ vérifie le système $H(x_1) = x_3$, $H(x_3) = x_5$, …, $H(x_{97}) = x_{99}$, $H(x_{99}) = x_1$ ce qui peut encore s'écrire $H(x_1) = x_3$, $H^2(x_1) = x_5$, …, $H^{49}(x_1) = x_{99}$, $H^{50}(x_1) = x_1$.
On va se concentrer sur la dernière égalité : $H^{50}(x_1) = x_1$.
On peut donner une expression générale de $H^n(x)$, quand il existe, pour tous les entiers positifs *n* ; en effet, par une récurrence facile, on montre que $H^n(x) = \frac{4n-(2n-1)x}{(2n+1)-nx}$. L'équation $H^n(x) = x$,que l'on résout facilement, n'admet qu'une seule et même solution pour toutes les valeurs de l'entier *n*, à savoir 2.
On revient maintenant à l'équation initialement proposée. On vient de voir que 2 est le seul candidat possible pour x_1. On place cette valeur dans la première équation du système initial et on trouve finalement comme unique 100-uplet solution : $(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, ..., 2, \frac{1}{2})$.