Enoncé n°17

Soient A, B et C trois points distincts situés sur trois arêtes distinctes non coplanaires d'un cube. Déterminer la position de ces trois points pour que le périmètre du triangle ABC soit minimum.

Solution

On munit l'espace d'un repère orthonormé. Soient les six points A(-1, -1, -1) ; B(1, -1, -1) ; D(-1, 1, -1) ; F(1, -1, 1) ; G(1, 1, 1) ; H(-1, 1, 1). Les segments [AD], [HG] et [BF] sont trois arêtes, non coplanaires deux à deux, d'un cube ABCDEFGH dont les arêtes ont pour longueur 2 et qui est centré sur l'origine du repère.

Soient maintenant trois points X, Y et Z appartenant respectivement à [HG], [AD] et [BF]. Leurs coordonnées peuvent s'écrire X(x, 1, 1), Y(-1, y, -1) et Z(1, -1, z) avec x, y et z compris au sens large entre -1 et 1.

On a $\mathrm{XY}=\sqrt{(x+1)^2+(1-y)^2+2^2}$, $\mathrm{YZ}=\sqrt{(y+1)^2+(z+1)^2+2^2}$ et $\mathrm{XZ}=\sqrt{(1-x)^2+(1-z)^2+2^2}$, le périmètre **P** du triangle XYZ correspond à la somme XY + YZ + XZ.

On va maintenant minorer l'expression du périmètre en utilisant l'inégalité de Minkowski :

$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i+c_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{3}c_i^2}$ où a_i, b_i et c_i désigne des réels positifs ou nuls. L'égalité se produisant si et seulement si il existe deux réels positifs ou nuls r et s tels que pour tout i on ait $a_i = r\, b_i = s\, c_i$.

On choisit $a_1 = 2$, $a_2 = x + 1$, $a_3 = 1 - y$, $b_1 = 2$, $b_2 = y + 1$, $b_3 = z + 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1 - z$, $c_3 = 1 - x$.

On a donc $\mathrm{P}\ge\sqrt{(2+2+2)^2+(x+y-z+3)^2+(-x-y+z+3)^2}$.

Pour deux réels positifs ou nuls α et β la moyenne quadratique est toujours supérieure ou égale à la moyenne arithmétique : $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\ge\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (avec égalité quand $\alpha=\beta$) et donc $\alpha^2+\beta^2\ge\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}$.

Avec $\alpha = x+y-z+3$ et $\beta = -x-y+z+3$, on a que $(x+y-z+3)^2+(-x-y+z+3)^2\ge\dfrac{((x+y-z+3)+(-x-y+z+3))^2}{2}=18$.

On en déduit que : $\mathrm{P}\ge\sqrt{(2+2+2)^2+18}=3\sqrt{6}$.

On peut avoir $\mathrm{P}=3\sqrt{6}$ quand $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Y a-t-il d'autres valeurs de x, y et z telles que $\mathrm{P}=3\sqrt{6}$?

Non car on est alors dans le cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski et dans celui de l'égalité des moyennes quadratiques et arithmétiques.

Le premier cas d'égalité entraîne, puisque $a_1 = b_1 = c_1 = 2$, que $a_2 = b_2 = c_2$ et $a_3 = b_3 = c_3$ et donc que $x = y = -z$.

Le second cas d'égalité entraîne quant à lui que $x + y = z$.

On doit donc avoir $x = y = z = 0$.

Les points X, Y et Z doivent respectivement occuper le milieux des arêtes [HG], [AD] et [BF] pour que le triangle XYZ ait un périmètre minimum.