Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Académie de Poitiers

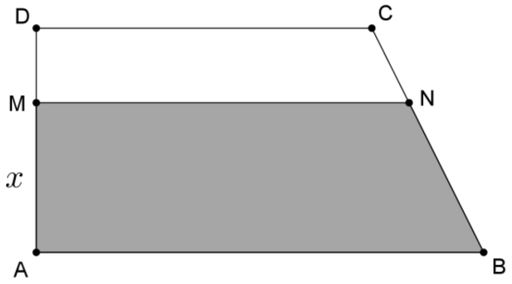
Les candidats traitent les **deux exercices.**

Exercice académique n°1 : ***Pour tous les élèves.***

L'exercice est décomposé en deux problèmes entièrement indépendants.

Problème 1 : coloriage du trapèze.

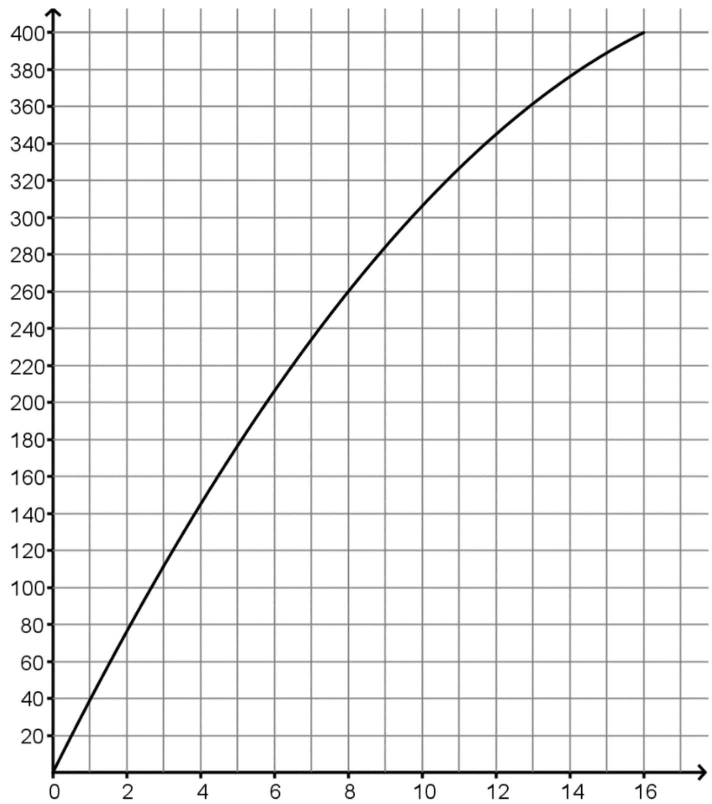
On considère le trapèze rectangle ABCD d'aire 400 représenté ci-dessous.
La figure n'est pas à l'échelle.



On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\dfrac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$.

Le point M est un point mobile sur le segment [AD].
On note N le point d'intersection de [BC] avec la parallèle à (AB) passant par M.
On note x la longueur AM.
Soit f la fonction qui à x associe l'aire du trapèze ABNM.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



A l'aide des données du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Vérifier que si M est le milieu de [AD], alors la surface grisée occupe 65 % de la surface totale du trapèze ABCD.

2. Calculer les longueurs des quatre côtés du trapèze ABCD.

***Problème 2* : la piscine municipale.**

Pour remplir une piscine municipale, un agent technique dispose de 3 tuyaux de caractéristiques différentes.

On suppose que chacun des trois tuyaux fournit de l'eau avec un débit constant qui lui est propre.

On rappelle que si t est la durée d'écoulement étudiée, alors le volume v *d'eau écoulée par un tuyau de débit* d *est donné par la formule* $v = d \times t$.

- Quand les tuyaux 1 et 2 coulent ensemble, il faut 3h pour remplir la piscine.

- Quand les tuyaux 1 et 3 coulent ensemble, il faut 6h pour remplir la piscine.

- Quand les tuyaux 2 et 3 coulent ensemble, il faut 4h pour remplir la piscine.

- Quel temps faudrait-il pour remplir la piscine si l'on utilise les trois tuyaux simultanément ?
- Et si l'on les utilise séparément ?

On donnera les réponses en heure(s) et minute(s) en arrondissant à la minute près le cas échéant.

<u>Exercice académique n°2 :</u> ***Pour les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale.***

<u>Généalogie des fractions.</u>

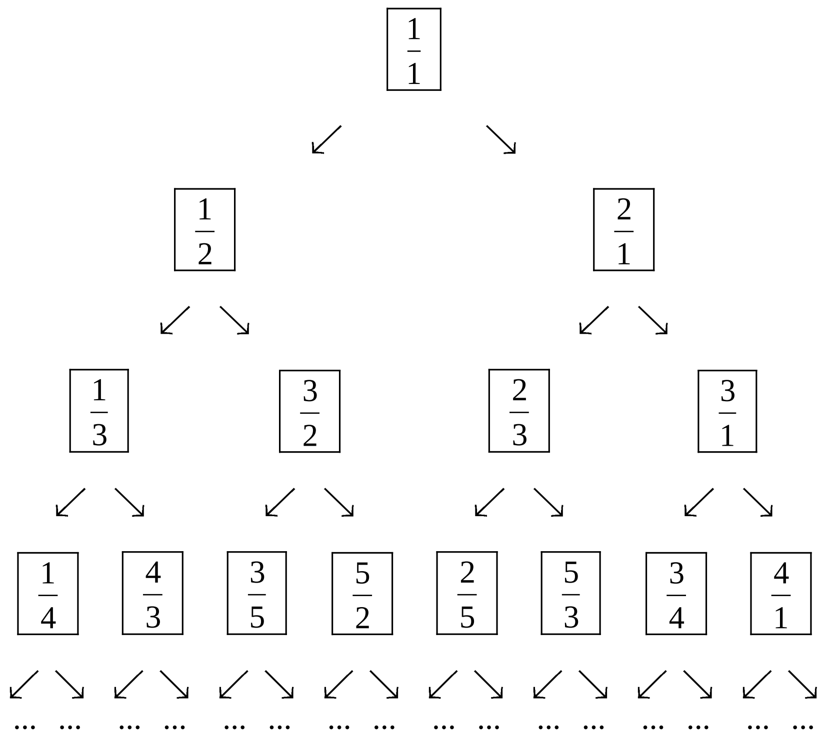
Dans cet exercice, on considère des fractions écrites sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls.

On construit un arbre généalogique de fractions en partant de la fraction $\frac{1}{1}$.

Chaque fraction $\frac{a}{b}$ donne naissance à deux fractions :

- la fille benjamine : $\frac{a}{a+b}$, qu'on écrit à gauche ;
- la fille aînée : $\frac{a+b}{b}$, qu'on écrit à droite.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \frac{a}{b} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{a}{a+b} & & \frac{a+b}{b} \end{tikzcd}$$



En poursuivant le processus, on obtient un arbre généalogique infini.

<u>Partie I : La famille proche.</u>

1. Quelles sont les deux filles de la fraction $\frac{22}{7}$?

2. Quelle est la mère de la fraction $\frac{17}{31}$? Et sa grand-mère ?

3. Quelle est la mère de la fraction $\frac{i}{j}$ si $i < j$? Et si $i > j$?

4. Quelle est la petite sœur de la fraction $\frac{355}{113}$?

5. Démontrer que les fractions $\frac{13}{31}$ et $\frac{23}{5}$ sont cousines.

6. Que peut-on dire de la succession des filles aînées de $\frac{1}{1}$?

Partie II : Des fractions irréductibles.

On considère une fraction strictement positive irréductible $\dfrac{a}{b}$.

Cela signifie que le seul diviseur commun des entiers naturels non nuls a et b est égal à 1.

1. Soit d un diviseur commun de a et $a+b$.

Montrer que d est forcément égal à 1.

Que peut-on en déduire pour la fille benjamine de $\dfrac{a}{b}$?

2. Expliquer pourquoi toutes les fractions qui apparaissent dans l'arbre généalogique sont irréductibles.

Partie III : À chacun sa place.

Dans la partie II, on a établi que l'arbre généalogique étudié comporte uniquement des fractions irréductibles strictement positives. On admet que toutes les fractions irréductibles strictement positives sont dans cet arbre généalogique, sans aucune répétition.

On peut ainsi numéroter toutes les fractions irréductibles strictement positives en considérant les lignes successives de l'arbre généalogique parcourues de haut en bas et de gauche à droite.

On peut représenter les choses comme sur l'arbre ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
& & & & & & & F_1 \arrow[dllll] \arrow[drrrr] & & & & & & & \\
& & & F_2 \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & & & & & F_3 \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
& F_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & F_5 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & F_6 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & F_7 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F_8 & & F_9 & & F_{10} & & F_{11} & & F_{12} & & F_{13} & & F_{14} & & F_{15}
\end{tikzcd}$$

On admet que dans cette situation, chaque fraction F_n a pour fille benjamine F_{2n} et pour fille aînée F_{2n+1} où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer le produit de deux fractions sœurs.

En déduire la valeur du produit de toutes les fractions d'une même génération.

2. Combien vaut F_{2023} ?

3. Déterminer l'entier n tel que $F_n = \dfrac{31}{43}$.

Exercice académique n°2 : ***Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale.***

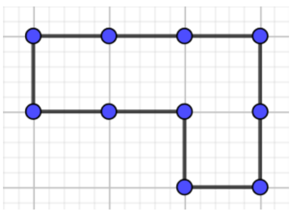
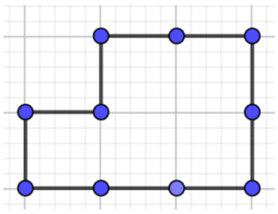
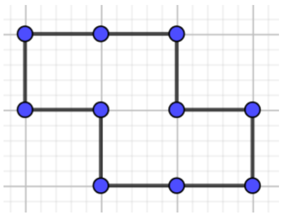
Jouer avec des allumettes.

On dispose d'une boite d'allumettes identiques. Avec ces allumettes, on peut former une ligne, brisée ou non, en les mettant bout à bout sur un quadrillage carré dont l'unité est la longueur d'une allumette.
Dans tout le problème, on s'intéresse aux polygones non croisés que l'on peut former avec ces allumettes en les plaçant sur les lignes du quadrillage.

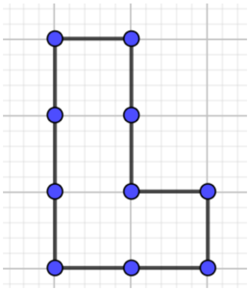
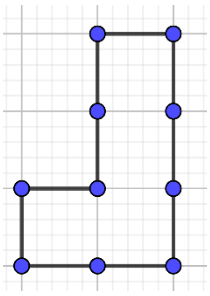
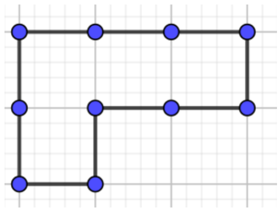
1ère partie :

1. Quel nombre minimum d'allumettes doit-on utiliser pour former un tel polygone ?
Quel polygone peut-on former avec ce nombre minimum d'allumettes ?

2. a) Voici 3 polygones de formes différentes que l'on peut former avec 10 allumettes :

Avec 10 allumettes pour chacun, dessiner 3 autres polygones qui soient de formes différentes des précédents.
Attention, par exemple, il ne faudra pas choisir les polygones ci-dessous qui ont la même forme que le premier donné précédemment.

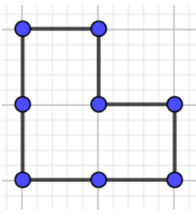




b) Mehdi forme un rectangle avec des allumettes et, à l'intérieur de celui-ci, il place d'autres allumettes faisant apparaître alors les 6 différents polygones de la question 2) a) (ceux-là uniquement et sans superposition).

Dessiner la figure réalisée par Medhi en faisant apparaître le rectangle et les 6 polygones à l'intérieur de celui-ci.
Au total, combien Medhi a-t-il eu besoin d'allumettes pour réaliser sa figure ?

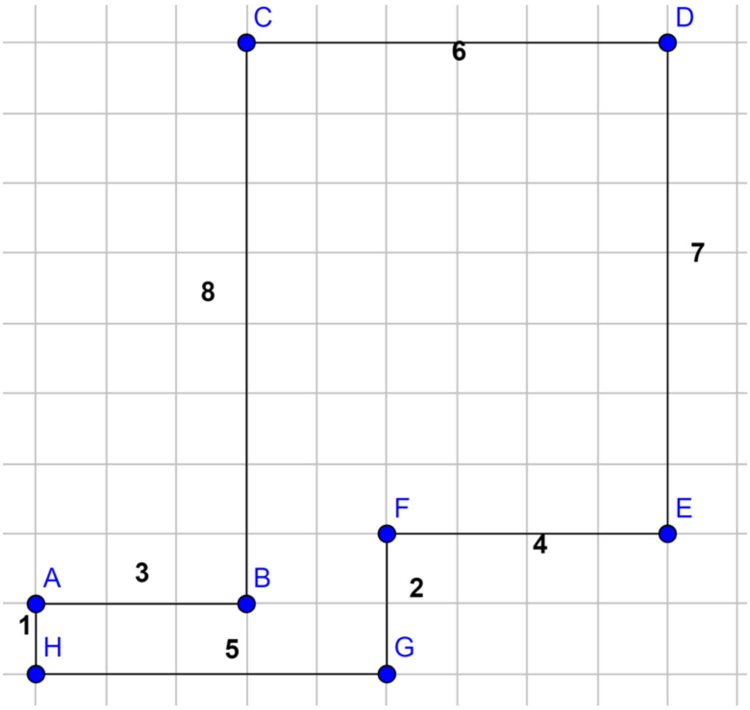
2ème partie :

1. On peut dessiner un polygone de 6 côtés, par exemple celui dessiné ci-dessous :



Soit p un entier pair avec $p \geq 6$.
Montrer que l'on peut fabriquer un polygone de p côtés.

2. On souhaite former un polygone à 8 côtés dont les côtés mesurent 1 allumette, 2 allumettes, 3 allumettes, … , et 8 allumettes. On a dessiné ci-dessous un tel polygone.



Sur l'annexe 1 donnée en dernière page du sujet, dessiner deux autres polygones de formes différentes vérifiant les mêmes conditions.

<u>Annexe 1 de l'exercice 2 « *Jouer avec des allumettes* ».</u> ***(Pour les élèves n'ayant pas la spécialité mathématiques)***

<u>Polygone n°1</u>

<u>Polygone n°2</u>