MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

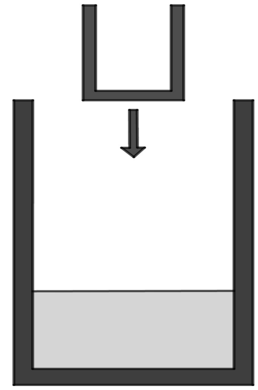
Académie de Poitiers

Les candidats traitent les **deux exercices.**

Exercice académique n°1 : Pour tous

L'exercice est décomposé en trois problèmes entièrement indépendants.

<u>Problème 1</u> : Un seau d'eau



On considère un seau de forme cylindrique de diamètre intérieur 16 cm.

Le seau contient une quantité d'eau de hauteur 8 cm.

On place dans le seau un gobelet en fer de forme également cylindrique avec un diamètre extérieur de 8 cm et une hauteur extérieure de 10 cm. Le gobelet a une épaisseur de 1 cm.

L'ouverture du gobelet est vers le haut. Le gobelet est tellement lourd qu'il descend verticalement et se pose au fond du seau.

1) Va-t-il rentrer de l'eau dans le gobelet ? Justifiez votre affirmation.
2) Si oui, quelle sera la hauteur d'eau dans le gobelet ?

<u>Problème 2</u> : Code PIN

Pour le code PIN de son nouveau téléphone portable, Yasmine a décidé de choisir un code entier à 4 chiffres qui s'écrit *abba*, avec *a* et *b* des chiffres différents, compris entre 0 et 9 (par exemple : 1331 ou 0770, mais pas 5555).

Par la suite, on appellera « code de type S » un code du type *abba*, avec *a* et *b* des chiffres différents, tous les deux compris entre 0 et 9.

1) a) Combien y a-t-il de codes de type S ?

   b) Si Yasmine choisit un code de type S au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un code de type S inférieur à 4000 ?

On dit que le code *baab* est le code jumeau de *abba*. On note *D* la différence entre le code *abba* et son code jumeau.

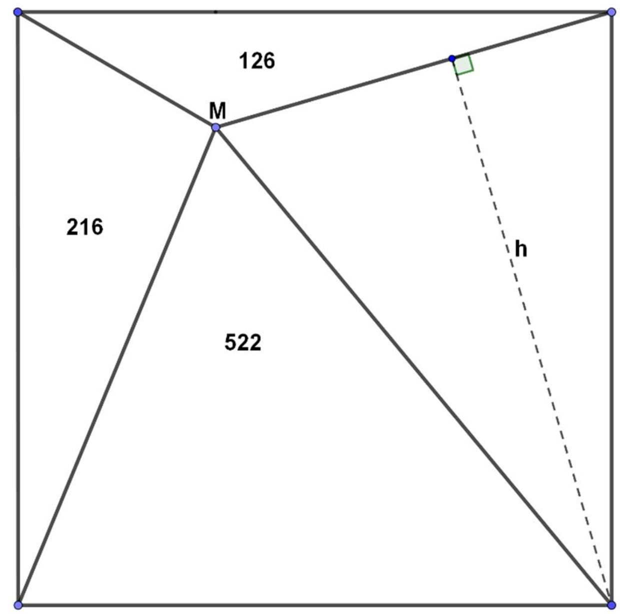
2) Démontrez que $D = 891(a - b)$.
3) Voici deux indices sur le code de type S que Yasmine a finalement choisi :
   - *D* est compris entre 3000 et 4000.
   - Le produit des chiffres de ce code est la puissance $5^{\text{ème}}$ d'un nombre entier non nul.

   Est-il possible de retrouver le code PIN de Yasmine ? Si oui, donnez-le.

4) Y a-t-il des codes de type S qui sont des nombres premiers ? Justifiez.

Problème 3* : *Partage d'un carré

A l'intérieur d'un carré, on place un point M que l'on relie à chacun des quatre sommets.



Quatre triangles sont ainsi formés, et l'on connaît seulement les aires de trois d'entre eux (indiquées directement sur les triangles).

1) Peut-on trouver l'aire du quatrième triangle ? Justifiez votre affirmation.

2) Quelle est la longueur *h* de la hauteur de ce quatrième triangle représentée sur la figure ?

Exercice académique n°2 : Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale

Pièces en chocolat

Partie I : Trucage et pépites de chocolat

Thierry est un grand amateur de cacao qui aime fabriquer des pièces en chocolat.

Chacune de ses pièces présente deux faces : une avec le chiffre 1 et l'autre avec le chiffre 2.

1) On lance deux pièces parfaitement équilibrées et on additionne les nombres obtenus avec chacune des pièces. À l'aide d'un arbre de probabilités, calculer les probabilités d'obtenir une somme égale à 2, 3 ou 4.

Thierry regrette qu'il n'y ait pas équiprobabilité entre les différentes sommes possibles (2, 3 ou 4).

Margot lui suggère alors de truquer les pièces en positionnant habilement quelques pépites de chocolat.

On note respectivement p_1 et p_2 les probabilités d'obtenir 1 avec la première et la deuxième pièce.

2) a) Montrer que l'équiprobabilité des trois sommes implique que $p_1 + p_2 = 1$ et $p_1 p_2 = \frac{1}{3}$.

   b) Est-il possible de truquer les pièces pour obtenir l'équiprobabilité des trois sommes ?

Partie II : En choisissant bien les faces

Charlotte suggère à Thierry de changer les valeurs indiquées sur chacune des faces des pièces pour obtenir des sommes équiprobables en additionnant les nombres obtenus avec chaque pièce.

On notera $\langle x|y \rangle$ une pièce sur laquelle les deux valeurs indiquées sont *x* et *y*.

Remarque : $\langle x|y \rangle$ et $\langle y|x \rangle$ désignent donc la même pièce.

Dans cette partie, les pièces sont supposées bien équilibrées.

1) On joue avec deux pièces : $\langle 0|2 \rangle$ et $\langle 1|2 \rangle$.
   Montrer que les probabilités d'obtenir les sommes 1, 2, 3 et 4 sont égales.

2) Thierry ne souhaite inscrire que des entiers naturels sur les faces de ses pièces.
   En jouant avec trois pièces, est-il possible que les sommes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 aient la même probabilité ?

3) Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On suppose qu'on dispose de *n* pièces permettant d'obtenir les sommes 1, 2, 3, ... , 2^n avec la même probabilité.

   Montrer qu'il est possible de confectionner $n+1$ pièces permettant d'obtenir les sommes 1, 2, 3, ... , 2^{n+1} avec la même probabilité.

Exercice académique n°2 : Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale

Un petit singe calculateur et gourmand

Des souches d'arbres sont alignées tous les mètres et numérotées de 1 à 70. Au pied de chacune des souches est disposé un peu de nourriture.
Dans le cadre d'une expérimentation, des chercheurs installent un petit singe, Kala, sur la souche n°1.
Des étudiants curieux observent la scène.
Un chercheur explique : « Kala va passer de la souche n°1 à la souche n°2, et il a l'autorisation de manger la friandise cachée au pied de la souche ; puis de la souche n°2, il va sauter sur la souche n°4 et se régaler à nouveau. En fait, il agrandit son saut d'une unité à chaque fois ce qui le conduit ensuite à la souche n°7 »
Un étudiant attentif continue : « Ensuite il ira sur la souche n°11, puis sur la souche n°16. »
Le chercheur le coupe alors : « Eh bien, justement non ! Ce que je ne vous ai pas encore dit, c'est que Kala est entraîné à faire ses déplacements prioritairement en arrière. Il ne fait son saut vers l'avant que si le saut en arrière l'amène sur une souche sur laquelle il est déjà passé, ou avant la première souche. Ainsi, après la souche n°7, il ira sur la souche n°3, et non pas sur la n°11. »
Et il rajoute : « Si Kala se trompe, il est ramené dans sa cage, et il est alors privé des morceaux de fruits qu'il aurait trouvés au pied de chaque souche, s'il ne s'était pas trompé ».
Après quelques jours d'entraînement, le petit singe, stimulé par les récompenses, ne se trompe plus.

1) a) Vérifier qu'après 8 sauts, Kala se trouve sur la souche n°13.
   b) Sur quelle souche se trouve Kala après son 12ème saut ?
2) La liste des souches successives constituant le parcours du singe une fois le n-ième (n>0) saut accompli peut être obtenue par l'algorithme suivant, à compléter :

```
listesouche ={1}
pour i variant de 1 à n :
        si listesouche(i-1)-i >0 et si …………………….. n'est pas dans listesouche.
                alors on ajoute ………………….à  listesouche.
        sinon
                on ajoute ………….. …………. à ………………..
fin pour.
écrire listesouche
```

3) Tout d'un coup, en arrivant sur une souche, Kala montre des signes de nervosité. Il pousse des petits cris, descendant de la souche puis y remontant, dévoilant ses dents de façon agressive. Il continue néanmoins son parcours. Expliquer le comportement de Kala.
4) Le début du parcours du singe est codé par la figure ci-dessous.
   a) Expliquer comment est codé le parcours.
   b) Combien de sauts du singe ont été codés sur cette figure ?
   c) Le dessin montre que certaines souches devraient être atteintes 2 fois par le singe. Lesquelles ?