

# LA PROPORTIONNALITE

## 1. Situation de proportionnalité

### Activité :

Le prix payé à la pompe à carburant pour diverses quantités d'essence SP68 est indiqué par le tableau suivant :

N° du relevé	1	2	3	4	5	6	7
Quantité (en L)	1	7,8		25,8	36,8	45	56
Prix (en €)			7,80	32,25	46,00		70,00

À gauche du tableau, une flèche courbe descendante est étiquetée  $\times 1,25$ . À droite, une flèche courbe montante est étiquetée  $\times 0,8$ .

- Pour chacune des colonnes complètes, calculer les rapports  $\frac{\text{Prix}}{\text{Quantité}}$  et  $\frac{\text{Quantité}}{\text{Prix}}$ .
- En déduire, alors, les coefficients à gauche et à droite du tableau.
- Calculer les valeurs manquantes.

### Réponses :

- Pour les colonnes n°4, n°5 et n°7, les quotients (Prix /Quantité) sont égaux à 1,25 :  
Pour les colonnes n°4, n°5 et n°7, les quotients (Quantité/Prix) sont égaux à 0,8 :
- Comme  $32,25 \times 0,8 = 25,8$  alors le coefficient de la flèche montante « multiplie par 0,8 ».  
Comme  $25,8 \times 1,25 = 32,25$  alors le coefficient de la flèche descendante « multiplie par 1,25 ».

### Bilan de l'activité :

- Pour chaque colonne du tableau, les nombres 1,25 et 0,8 sont les valeurs communes des rapports respectifs  $\frac{\text{Prix}}{\text{Quantité}}$  et  $\frac{\text{Quantité}}{\text{Prix}}$ .
- On obtient les termes de la deuxième ligne en multipliant ceux de la première ligne par 1,25.
- On obtient les termes de la première ligne en multipliant ceux de la deuxième ligne par 0,8.

### Définition :

- Un tableau pour lequel on passe d'une ligne à l'autre en multipliant toujours par le même nombre  $k$  s'appelle un tableau de proportionnalité.
- Le nombre  $k$  est appelé un coefficient de proportionnalité.
- Les suites de nombres formées par chaque ligne du tableau sont dites proportionnelles entre elles.

### Retour à l'activité :

- Le tableau étant de proportionnalité on dit que « la quantité » est **proportionnelle** « au prix » et inversement. On dit aussi que la quantité et le prix sont deux **grandeurs proportionnelles**.
- La suite de nombres (1 ; 7,8 ; 6,24 ; 25,8 ; 36,8 ; 45 ; 56) est proportionnelle à la suite (1,25 ; 9,75 ; 7,80 ; 32,25 ; 46 ; 56,25 ; 70) et inversement.
- Les nombres 1,25 et 0,8 sont les **coefficients de proportionnalité** du tableau.  
En calculant l'inverse de chaque coefficient :  $1/1,25 = 0,8$  et  $1/0,8 = 1,25$   
Ainsi les coefficients 1,25 et 0,8 sont **inverses**.

### On retiendra :

Si on connaît l'un des deux coefficients de proportionnalité d'un tableau, le 2<sup>ème</sup> se détermine en calculant l'inverse du 1<sup>er</sup>.

## 2. Calcul d'une quatrième proportionnelle

Dans l'activité précédente et d'après les valeurs des colonnes n°4 et n°5 du tableau nous avons vu que :

$$\frac{32,25}{25,8} = 1,25 \quad \text{et} \quad \frac{46}{36,8} = 1,25 \quad \text{ainsi les rapports sont égaux :} \quad \frac{32,25}{25,8} = \frac{46}{36,8}$$

On dit que les rapports  $\frac{46}{36,8}$  et  $\frac{32,25}{25,8}$  **sont de même proportion**.

De plus, si on calcule les produits des extrêmes :  $32,25 \times 36,8 = 1\,186,8$  et  $25,8 \times 46 = 1\,186,8$   
D'où l'égalité :  $32,25 \times 36,8 = 25,8 \times 46$ .

### On retiendra :

Soit a, b, c et d des nombres réels avec b et d non nuls :

a	c
b	d

Si les rapports  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont de même proportion alors :

- le tableau est de proportionnalité
- Les produits des extrêmes sont égaux :  $a \times d = c \times b$ .

On parle aussi de « Produit en croix ».

### Application :

Calculer x dans les cas pour que les rapports suivants soient de même proportion :

a)  $\frac{x}{3,9}$  et  $\frac{0,75}{4,5}$

b)  $\frac{0,9}{0,25}$  et  $\frac{9,6}{x}$

### Réponses :

a)  $x = (0,75 \times 3,9) / 4,5 = 0,65$

b)  $x = 2,4 / 0,9 = 8/3$

## 3. Les partages proportionnels

### Activité :

Un employeur propose une prime à ses secrétaires pour un compte-rendu manuscrit à mettre en forme. Il souhaite que le partage soit proportionnel au nombre de pages tapées. La première secrétaire a tapé 15 pages du compte-rendu, la seconde 20 pages et la troisième 25 pages.

Sachant que la seconde secrétaire a bénéficié d'une prime de 48 € calculer celle des deux autres ainsi que la somme totale partagée.

### Réponses :

On appelle x et y la part respective de la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> secrétaire.

Secrétaire	n°1	n°2	n°3	« Colonne somme »
Prime (€)	x	48	y	$x+48+y=144$
Nb de pages	15	20	25	$15+20+25=60$

  $\times 2,4$

On a :  $\frac{x}{15} = \frac{48}{20} = \frac{y}{25} = \frac{144}{60} = 2,4$

Ainsi :  $x = 15 \times 2,4$  donc  $x = 36$

$y = 25 \times 2,4$  donc  $y = 60$

D'où la somme totale :  $36 + 48 + 60 = 144$

### Conclusion :

La part des deux autres secrétaires est 36 € et 60€. La somme totale est 144 €.

### Remarques :

Le tableau étant de proportionnalité, on a l'égalité des rapports suivant :  $\frac{36}{15} = \frac{48}{20} = \frac{60}{25} = \frac{144}{60} = 2,4$

Par ailleurs, si on considère la « colonne somme », on observe que :  $\frac{36+48+60}{15+20+25} = \frac{144}{60} = 2,4$ .

Ainsi, en ajoutant une colonne « somme » à ce tableau de proportionnalité, celui-ci reste de proportionnalité.

### On retiendra :

Etant donné succession de rapports égaux, on obtient un rapport de même valeur lorsque le numérateur est la somme des numérateurs et le dénominateur est la somme des dénominateurs :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'}$$